PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: DE LA INTEGRAL COMO HERRAMIENTA A LA INTEGRAL COMO NOCIÓN FORMAL: DE LAS CUADRATURAS A LA INTEGRAL DE CAUCHY

Autores:

Nombre: DANIEL STEVEN MORAN PIZARRO Firma: Daniel S. Moran
C.C. 1118297741

Nombre: Firma:
C.C.

Nombre: Firma:
C.C.

Fecha: 14/10/2014

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	De la integral como herramienta a la integral como noción formal: De las cuadraturas a la integral de Cauchy						
Se trata de:	Proyecto [ ]			Informe Final [X]			
Director:	Dr. Luis Cornelio Recalde						
1er Evaluador:	Dra. Martha Lucía Bobadilla						
2do Evaluador:	Dr. Carlos Mario Jaramillo						
Fecha y Hora	Año: 2014		Mes: 10		Día: 09		Hora: 9:00 am

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
DANIEL STEVEN MORÁN PIZARRO	200941459	3487

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	X
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

	Martha Lucía B	P/ Maribel P. Huacuna
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

DE LA INTEGRAL COMO HERRAMIENTA A LA INTEGRAL COMO NOCIÓN FORMAL: DE LAS CUADRATURAS A LA INTEGRAL DE CAUCHY

DANIEL STEVEN MORAN PIZARRO

Trabajo de grado presentado en el programa académico Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

DIRECTOR
Dr. Luis Cornelio Recalde

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2014

Contenido

TABLA DE FIGURAS

RESUMEN

[De la integral como herramienta a la integral como noción formal: de las cuadraturas a la integral de Cauchy]

Daniel Steven Moran Pizarro

Desde hace varios años se vienen discutiendo los problemas del aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. La pérdida de estos cursos se manifiesta en insatisfacción y posterior deserción de los estudiantes en los programas universitarios. Generalmente en los cursos de ingeniería, el estudiante recibe una serie de técnicas de aplicación, pero no comprende en el fondo lo que está haciendo, viéndose limitado en la aplicación de los conceptos matemáticos en algunas aplicaciones de la ingeniería u otras ramas. En este trabajo se reporta un problema histórico de evolución de conceptos que tiene relación con el trayecto que va de la herramienta (entendida como proceso) al objeto, combinando aspectos filosóficos y epistemológicos. La directriz de esta tesis es epistemológica. La idea central de este trabajo es develar el paso de la integral como herramienta (entendida como un proceso) a la noción de la integral, y este problema se enmarca en un ámbito central de la epistemología como lo es la instauración y evolución de los conceptos. Para ello, se usó el marco teórico propuesto en (Sfard, 1991), en donde se plantea que una noción matemática, para tener ese cambio ontológico de "versión herramienta" a "versión cosificada" experimenta fundamentalmente tres procesos: *interiorización, condensación* y *cosificación*. Teniendo en cuenta estos aspectos, se habla de una posible motivación para hablar de una siguiente etapa en la constitución de la integral, basada en la idea de los estructuralismos matemáticos. Hablar de la integral en su etapa posterior son los inicios de una posible investigación más detallada sobre la integral, cuestiones que se escapan del objetivo de esta tesis.

Palabras clave: Cauchy, cuadraturas, estructuralismos, Epistemología, Historia de la Integral, superestructuralización.

ABSTRACT

[Of the integral as a tool process to the integral as formal notion: Of the squares to the Cauchy's integral]

Daniel Steven Moran Pizarro

Since several years have been discussed learning disabilities Differential and Integral Calculus. The loss of these courses is manifested in dissatisfaction and subsequent desertion of students in university programs. Usually in engineering courses, the student receives a number of application techniques, but does not understand basically what you are doing, be constrained in the application of mathematical concepts in some engineering applications or other branches. In this paper reports a historical problem of evolution of concepts is related to the path that goes from the tool (as a process) the object, combining philosophical and epistemological aspects. The guideline of this thesis is epistemological. The main idea of this work is to reveal the passage of the integral as a tool (as a process) to the notion of the integral, and this problem is part of a central field of epistemology, such as the establishment and evolution of concepts. For this, the theoretical framework proposed in (Sfard, 1991), where it is stated that a mathematical notion, to have that ontological change version of "tool" a "reified version" fundamentally undergoes three processes are used. This process are *interiorization*, *condensation* and *objectification*. Considering these aspects, there is talk of a possible motivation to talk about the next stage in the formation of the integral, based on the idea of mathematical structuralism. Discuss comprehensive in its later stage are the beginnings of a possible further research on comprehensive, issues that are beyond the scope of this thesis.

Keywords: Cauchy, squares, structuralism, Epistemology, History of Integral, super structuralization.

INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años se vienen discutiendo los problemas del aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. La pérdida de estos cursos se manifiesta en insatisfacción y posterior deserción de los estudiantes en los programas universitarios. Generalmente en los cursos de ingeniería, el estudiante recibe una serie de técnicas de aplicación, pero no comprende en el fondo lo que está haciendo, viéndose limitado en la aplicación de los conceptos matemáticos en algunas aplicaciones de la ingeniería u otras ramas. Mucho se ha hablado de no abordar los conceptos matemáticos como "reglas de justicia divina" en donde, primando el mecanicismo frente a la comprensibilidad, se ve una desarticulación de una serie de técnicas que de por sí ellas están articuladas en un entramado teórico. Con ello se logra que *a posteriori* el estudiante no comprenda los siguientes conceptos, y más aún sus aplicaciones en la Física e Ingeniería: se le presenta al estudiante un problema en un contexto determinado y difícilmente logra entrever ese vínculo existente entre las matemáticas con la experiencia y realidad.

De acuerdo con lo establecido en los estándares básicos de competencias:

> …se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares. Estas consideraciones se amplían con la visión del carácter histórico y contingente de las matemáticas, consideradas ahora como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes. (MEN, 2006, pág. 34)

Por tanto, se hace necesario poder comprender cuáles son los elementos de causalidad que permitan entender por qué las nociones matemáticas son lo que son, comprendiendo que éstas llevan a cuestas una historia que a nosotros, como futuros educadores matemáticos, nos debe interesar en pro de que el estudiante mejore sus niveles de comprensión.

Las actividades matemáticas van emergiendo en la historia gracias a necesidades humanas que hunden sus raíces fundamentalmente en las actividades de medir, contar y ordenar; nociones que van apareciendo primero, como una herramienta que da solución a un problema determinado, y posteriormente, sea el caso, va adquiriendo un status ontológico propio que la permite catalogar como una noción propiamente dicha de las matemáticas, con sus propios métodos y problemas.

En este trabajo se reporta un problema histórico de evolución de conceptos que tiene relación con el trayecto que va de la herramienta (entendida como proceso) al objeto, combinando aspectos filosóficos y epistemológicos. La directriz de esta tesis es epistemológica. La idea central de este trabajo es develar el paso de la integral como herramienta[1] a la noción de la integral, y este problema se enmarca en un ámbito central de la epistemología como lo es la instauración y evolución de los conceptos.

El objetivo de esta tesis es develar, cómo es que se da ese movimiento que va de una serie de herramientas conceptuales a una noción matemática con significado propio, particularmente en el caso de la integral. Para ello, se usó el marco teórico propuesto en (Sfard, 1991), en donde se plantea que una noción matemática, para tener ese cambio ontológico de "versión herramienta" a "versión cosificada" sufre fundamentalmente tres procesos: *interiorización, condensación* y *cosificación*.

En algunas revisiones que se hacen, como en (Boyer C. , 1987), (Grattan-Guiness, 1982), (Klein, 1972), (Recalde L. , 2011), entre otros; se observa que casi todos los problemas de las matemáticas, en particular el problema de la integral, hunden sus raíces en la antigüedad griega, con el concepto de medida de figuras planas. Posteriormente, este problema va evolucionando hasta que hay un momento determinado en el cual se instauran algunos métodos y procesos heurísticos (herramientas) para poder medir figuras planas, convirtiéndose en el problema general de las cuadraturas. Ese problema va cambiando de matices convirtiéndose, a partir de los trabajos de Descartes, en el problema de hallar el área bajo la curva. En

[1] De ahora en adelante, cuando se hable del término herramienta, se entenderá esta como un proceso.

Newton y Leibniz aparece ya algo, que no es la herramienta, sino que Newton se preocupa un poco de hablar entre cuadraturas y anticuadraturas. Aquí hay algo clave, ya que parece ser que Newton está pensando en una cuestión diferente, que va un poco más allá del problema de la medida como tal, y que tiene relación con las cuadraturas y el trazado de tangentes. Ese proceso se va desarrollando en el siglo XVIII y el siglo XIX. Especialmente este proceso se va poniendo en evidencia cuando se solucionan ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos físicos, en donde las soluciones a estas ecuaciones son las funciones, que juegan un papel muy importante yendo de la mano de la noción de integral. En este periodo se presenta todo un desarrollo teórico con respecto a estos aspectos, hasta que en la escuela francesa se da un primer paso, cuando se le da un tratamiento a este problema. Los Bernoulli hablan del proceso de integración, incorporando el término *integral*. Otros matemáticos contemporáneos como Euler aportaron de manera significativa mediante la formalización y el rigor. Pero quien reconoce ese nuevo concepto, ese nuevo aspecto de la matemática es Cauchy; estableciendo en 1821 el concepto de límite y función; y dos años después, define lo que es la integral, particularmente para funciones continuas.

Siguiendo esta línea de desarrollo, se ha parcelado este documento de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presentan los aspectos metodológicos que se tienen en cuenta en la investigación realizada. Se habla sobre la diferencia entre herramienta y objeto que establece Anna Sfard, la brecha ontológica presente entre ambas concepciones, y la manera en que estas se deberían *complementar* para poder lograr una mejor comprensión de las matemáticas. Se explica brevemente en qué consisten los procesos de interiorización, condensación y cosificación de las nociones matemáticas.

En el segundo capítulo se muestra cómo la integral hunde sus raíces en la antigüedad griega, fundamentalmente en el problema de las cuadraturas. Se explica cuáles fueron las apuestas teóricas y los aspectos conceptuales desplegados por los matemáticos de la antigüedad que sirvieron en la constitución histórica de la integral. Se cotejarán las matemáticas de la antigüedad con elementos actuales en donde sabemos cómo es que se define la integral. Para ello, se tomará como referencia el estilo adoptado en (Dhombres, 1980). En la sección 2.1 se describe *grosso modo* el antiguo problema de la medida, y la manera en cómo estos elementos se constituyen en la cimiente primigenia de la integral. En la sección 2.2 se detallan los elementos conceptuales de la medida e integral en Euclides, llamando fundamentalmente la atención en la proposición X,1 de los *Elementos* de Euclides. En la sección 2.3 se muestra la manera en la cual Arquímedes retoma estos aspectos conceptuales de Euclides inaugurando el método que será por excelencia, el método de la medida de magnitudes: el método exhaustivo. En la sección 2.4 se comenta la forma procedimental y la heurística para resolver el problema de la cuadratura de la parábola usando el método exhaustivo y el método mecánico, respectivamente; se llama la atención en el hecho de que Arquímedes está previendo dos visiones distintas del espacio, que son precursoras de los indivisibles e infinitesimales; detalle importante en la problemática del rigor de los procedimientos hacia el siglo XVIII.

En el tercer capítulo se describen algunos elementos de causalidad que permitieron la resolución a algunos problemas de cuadraturas y la manera en la cual Newton y Leibniz sistematizaron y enriquecieron ese cúmulo de técnicas. En la sección 3.1 se detallan algunos elementos de causalidad que permitieron que el problema de las cuadraturas se enmarcara en un problema más general. Fundamentalmente, este paso se logró con Descartes, que con su geometría analítica pudo reinterpretar el problema de las cuadraturas como el área bajo la curva. Se habla tangencialmente del problema del rigor en el siglo XVII y XVIII sobre el problema de homogeneidad presente en la tradición de los indivisibles de Cavalieri (otro principio de causalidad) y cómo Roberval y Fermat abordaron estos problemas. Se muestra también un gran aporte a la constitución histórica, no solo de la integral, sino fundamentalmente de la medida, como lo es la definición del área del rectángulo proporcionada por Wallis. En la sección 3.2 se destaca el hecho de que, si bien Newton y Leibniz fueron en gran medida sistematizadores de las técnicas procedentes, las enriquecieron íntegramente creando un formalismo con rigor de su época. Se llama la atención fundamental al trabajo *De Methodis* en donde Newton presenta esta serie de métodos y técnicas de una forma tal que ameriten un tratamiento especial, base fundamental en la constitución del Análisis como rama de las matemáticas. También se habla de los aportes de Leibniz, especialmente en lo concerniente a la adecuadísima notación ∫, que se inmortalizará como el símbolo para denotar a la integral.

En el cuarto capítulo se muestran otros elementos de causalidad en la constitución histórica de la integral como una noción matemática, y el cómo es que estas técnicas se van desprendiendo de la operación de cuadraturas y anticuadraturas, olvidando su pasado geométrico en la creación de un formalismo que permita pasar del proceso de integración a la integral. En este sentido, la solución a las ecuaciones diferenciales y el reconocimiento de la noción de función como objeto del análisis matemático jugaron un papel fundamental. Basado en el concepto de límite, es Cauchy quién define formalmente la integral, y lo hace para funciones continuas. En la sección 4.1 se destaca la idea de la autonomización progresiva de los métodos para encontrar relaciones de cuadraturas ha adquirido tanta fuerza, que recibe el nombre de *integral*. Este nombre se lo dan Los Bernoulli alrededor del año 1700, un hecho que es epistemológicamente significativo. En la sección 4.2 se llama la atención en que uno de los aspectos cardinales en la idea de *la integral* responde a la necesidad de un formalismo necesario en la resolución de ecuaciones diferenciales. Se muestra la solución al problema histórico de la catenaria, y cómo la aplicación de los métodos del "nuevo cálculo" permite su solución. En la sección 4.3 se muestran algunos aportes de Euler a la integración, destacando que es uno de los principales artesanos en la constitución del Análisis como rama de las matemáticas. Particularmente, reconoce el papel fundamental que juegan las funciones en el Análisis Matemático. En la sección 4.4 se describe a grandes rasgos la manera en que Fourier representa las funciones mediante series trigonométricas y su importancia en la Matematización de fenómenos físicos. En su preocupación por las funciones discontinuas, se habla un poco acerca de la relación existente entre esto y volver a la definición geométrica de la integral como un área. La sección 4.5 constituye el punto de llegada. Se describe la manera en que Cauchy, en 1823 en su *Cours d'Analyse* da una definición formal y analítica de la integral, y lo hace para funciones continuas. Este punto es a lo que llamamos versión cosificada de la integral, que pasa del problema de las cuadraturas a la integral de Cauchy.

En el quinto capítulo se hace una descripción de todo este proceso y se aborda un poco la evolución de la integral después de Cauchy. Se discute un poco sobre el documento de Anna Sfard, y cómo es que la integral también responde a las tres etapas propuestas por ella. Teniendo en cuenta estos aspectos, se habla de una posible motivación para hablar de una siguiente etapa en la constitución de la integral, basada en la idea de los estructuralismos matemáticos. Hablar de la integral en su etapa posterior son los inicios de una posible investigación más detallada sobre la integral, cuestiones que se escapan del objetivo de esta tesis.

En algunos casos fue necesario recurrir a fuentes primarias, pero en todo el proceso fueron fundamentales y de gran apoyo los libros *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos,* (Grattan-Guiness, 1982); *The Historical Development of the Calculus* (Edwards, 1949); *Lecciones de Historia,* (Recalde L. , 2011) así como su artículo *Las raíces históricas de la Integral de Lebesgue,* (Recalde L. , 2007); la tesis doctoral: *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico,* (Bobadilla, 2012); *Histoire de l'intégration,* (Pier, 1996)*; Lebesgue's Theory of Integration,* (Hawkins, 1970) y *Constitution de la Théorie Moderne de L'Intégration,* (Michel, 1992).

1. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

Una revisión al desarrollo histórico de las matemáticas nos muestra que ellas están ligadas, en principio, a dar cuenta de las actividades de medir, contar y ordenar. Las matemáticas se van delineando como aquella respuesta que el ser humano va dando a problemas de este tipo, constituyéndose como una actividad humana, y más aún, como una construcción histórica. En este sentido, podemos ubicar su génesis en la necesidad de constituir un aparato teórico, regido por unas reglas lógicas, que dé cuenta en principio de medir, contar y ordenar; aspectos que no desaparecen de las prácticas humanas.

En las matemáticas nos enfrentamos al problema de la compresión de los conceptos y resulta interesante que Poincaré llame la atención en el hecho del porqué tantas personas no aprenden matemáticas cuando las reglas lógicas en que las matemáticas se establecen son tan sencillas. Si esta última afirmación fuera correcta, daría pie a pensar que el proceso de aprendizaje y enseñanza no es tan complejo. En palabras de Poincaré:

> Un…hecho debe asombrarnos, o mejor debería asombrarnos si no estuviéramos tan acostumbrados a él ¿Cómo puede suceder que existan personas quienes no entiendan matemáticas? Si la ciencia invoca solamente las reglas de la lógica, aquellas aceptadas por todas las mentes bien formadas… ¿cómo puede ser que existan tantas personas que son completamente impermeables a ella? (Poincaré, 1952, p.49; El original en francés fue publicado en 1908)

Mediante esta crítica, Poincaré llama la atención a los logicistas, puesto que para él el aprendizaje de las Matemáticas debe estar mediado por la intuición. En lo concerniente al aprendizaje de las matemáticas, la postura logicista parece ser algo simplista. Pero lo cierto, es que en los entornos educativos, eso es complicado. A los estudiantes se les hace más difícil aprender matemáticas que otras ciencias. Se podría conjeturar entonces que las matemáticas tienen algo más que las otras ciencias que hace que algunas personas no logren encontrar alguna de las vías de aprendizaje de esta. La pregunta se traslada al ámbito ontológico y epistemológico: ¿Cómo difiere la abstracción matemática de otro tipo de abstracciones con respecto a otras ciencias?. Se llama la atención inmediatamente a la naturaleza de los objetos matemáticos.

Los objetos matemáticos son construidos, pero llega un momento en que se vuelven abstractos y se estudian a través de las representaciones compartidas, dado que el entendimiento de las distintas representaciones existen *a posteriori* de un convenio social. Ahora pues, tener la capacidad para ver de algún modo estos objetos puros del pensamiento parece ser una componente esencial de la habilidad matemática; la carencia de esta capacidad puede ser una de las mayores razones a causa de la cual las matemáticas aparecen prácticamente impermeables a tantas "mentes bien formadas" (Sfard, 1991).

Para ello, se debería examinar un poco acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos y cómo ellos emergen. Un análisis *grosso modo* de las definiciones y representaciones en matemáticas, nos revela que las nociones abstractas se pueden concebir de dos maneras, si bien diferentes, se conjugan en el desarrollo histórico: *estructuralmente* como objetos, y *operacionalmente* como herramientas. Ver una entidad matemática como un objeto significa ser capaz de referirse a él como si fuera una cosa real –una estructura estática, de tal forma que se puede manipular como una totalidad, sin entrar en detalles. Según Hadamard, el pensamiento estructural dota a un concepto de "una clase de fisonomía", el cual le permite a una persona "pensar en él como una cosa única, por más complicado que pueda ser, así como vemos el rostro de un hombre". Contrastando un poco, tendríamos que, interpretar un objeto como una herramienta significa verla como una entidad potencial más que una entidad actual. Así, mientras la concepción estructural es estática, instantánea e integrada, la concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada. Existe una brecha ontológica profunda entre las concepciones operacionales y estructurales.

Las concepciones operacionales y estructurales de la misma noción matemática no son mutuamente excluyentes y en pro de su comprensión ellas son de hecho *complementarias*. Como indica Sfard (1991): "…la habilidad de ver… como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de comprensión".

Los objetos matemáticos se pueden concebir de esas dos maneras. Por ejemplo, las funciones pueden ser concebidas como un proceso operacional hablando en los términos de la variación de algo con respecto a otra cosa. Históricamente, vemos que las funciones tienen sus elementos primigenios en la noción de curva, cumpliendo su itinerario de curva-ecuación-función. Los matemáticos usaban las curvas que representarían posteriormente las funciones; por ejemplo, Descartes asignó a cada curva un "nombre cartesiano" llamado *ecuación*, la cual gobierna a la curva. Pero la definición de curva de Descartes se tornaba insuficiente al emerger curvas como la cicloide, la cisoide, etc., que no se dejaban capturar por una ecuación cartesiana. Estas curvas, llamadas mecánicas, poseían dependencia del tiempo, recurriendo a términos extra-matemáticos. Los matemáticos posteriores usaron parametrizaciones dependientes del tiempo, y la noción de curva (antecedente de las funciones) se constituye como un proceso. Hay un tránsito con la definición de función dada por Euler, pero aun así es insuficiente para modelar las funciones. Es en 1821 con Cauchy, que se logra que la función adquiera un estatus de objeto matemático, soportado en el concepto de límite, base del nuevo análisis. Otro claro ejemplo es la noción de número real. Desde que el hombre razona, ha tenido la necesidad de contar, y se constituye como un proceso. Los pitagóricos aferran todo a la idea de número, pensando que todo está en relación de los números enteros, y posteriormente se produce la primera gran debacle: la emergencia de las magnitudes inconmensurables. Se separan los números de las magnitudes, y cada uno se va desarrollando posteriormente hasta que en 1872 se vuelven a unir después de los trabajos de Dedekind y Cantor. Ellos construyen formalmente los números reales, y con ello, el objeto número real.

La siguiente tabla permite ilustrar mejor algunas aseveraciones:

	ESTRUCTURAL	OPERACIONAL
Función	"Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable" (Cauchy, 1821)	Proceso operativo o Método bien definido de inducir de un sistema a otro (Skemp, 1971)
Simetría	Propiedad de una forma geométrica	Transformación de una forma geométrica
Número natural	Propiedad de un conjunto o la clase de todos los conjuntos de la misma cardinalidad finita	0 o cualquier otro número obtenido de otro natural por la adición de uno. [el resultado del conteo]
Número racional	Pares de enteros (un miembro de un conjunto de parejas especialmente definido)	[Resultado de] la división de dos enteros.
Círculo	El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto dado	[Curva obtenida por] la rotación de un compás alrededor de un punto fijo.

Las matemáticas, vistas dicotómicamente, han sido vistas como: abstractas y algorítmicas (Halmos, 1985), declarativa y procedual (Anderson, 1976), proceso y producto (Kaput, 1979; Davis 1975), dialécticas y algorítmicas (Henrici, 1974), figurativo y operativo (Piaget, 1970), conceptual y procedural (Lesh y Landau, 1983; Hiebert 1985), instrumental y relacional (Skemp, 1976). No se trata de dicotomías, se trata de dualidad. Se propone la naturaleza ontológica y psicológica de los objetos matemáticos y su complementariedad, basados en el enfoque operacional-estructural. El prestar atención a las dicotomías, deja de lado el poder entrever las apuestas filosóficas tácitas en la actividad matemática.

Esta forma de ver las matemáticas no es una cuestión nueva. Algunos matemáticos sobrevaloran la ciencia pura por encima de las aplicaciones ingenieriles de la ciencia. Se tiende una especie de lucha entre las matemáticas "algorítmicas" y las matemáticas "abstractas", afirmando tajantemente que las matemáticas algorítmicas no promueven el pensamiento. La tesis de Sfard, es que las matemáticas algorítmicas (las que representan la parte operacional de los objetos) no jueguen un papel secundario, sino que se contrasten, se dualicen y complementen con las abstractas; y que, si se está interesado en el tema de las aplicaciones o de la educación, los elementos operacionales y estructurales no pueden ser separados uno del otro. Mejor no pudo decirlo Halmos (1985): "tratar de decir cual componente es más importante no es más significativo que el debate si para caminar se necesita más el pie derecho que el izquierdo". Es claro pues, que la concepción estructural es muy difícil de alcanzar, siendo esta capacidad la que distingue a los matemáticos de los "simples mortales".

De ambas definiciones, la postura estructural parece más abstracta que la operacional. De acuerdo con Sfard (1991), para hablar de *objetos* matemáticos, debemos ser capaces de tratar con los *productos* de algunos procesos sin preocuparse por los procesos mismos. Desde un punto de vista histórico, observamos que la mayoría de las ideas se originaron en los *procesos* más que en los *objetos*. Muy bien lo apunta la historiadora de las matemáticas Judith Grabiner (1983): "la derivada fue primero *utilizada* (implícitamente), después *descubierta* y finalmente *definida*". Y así, no solo ha sido el caso de la derivada, sino de la mayoría (si no es que de todos) los objetos de las matemáticas. Objetos y nociones como función e integral tuvieron una transición de herramienta a objeto o noción (sea el caso) al dejar de un lado componentes extra-matemáticos como la dependencia del tiempo, y aislar su campo de estudio puramente al análisis matemático, en donde se ha incorporado una nueva operación: *el paso al límite*.

> “En tiempos recientes la palabra “variable” es predominante en las definiciones [de función]. Consecuentemente, Análisis tendría que tratar con un proceso en el tiempo, puesto que toma variables en consideración. Pero de hecho nada tiene que ver con el tiempo; su aplicabilidad a procesos que ocurren en el tiempo es irrelevante… tan pronto como tratamos de mencionar una variable, tropezaremos con algo que varía en el tiempo y así no pertenece pues al Análisis puro. Y con todo debe ser posible señalar una variable que no involucre algo ajeno a la aritmética, si las variables son objetos del Análisis”. (Frege, 1970. p.107; Original en alemán: 1904)

Las definiciones de función (cuasi operacionales) se tornaron insuficientes para abarcar el espectro de funciones más allá de las funciones continuas. Dirichlet ello puso de manifiesto al presentar una función la cual no tenía sentido pensarse bajo los términos pre-establecidos de lo que era una función. Varios procesos tuvieron que ser convertidos en totalidades estáticas y compactas (versiones cosificadas) para que adquirieran un mayor estatus en la teoría, tan grande que puedan tener sus métodos y problemas propios.

Todas las reflexiones presentadas anteriormente son puramente del orden epistemológico. Haciendo una inmersión del análisis epistemológico a las apuestas didácticas, ¿será el modelo propuesto de formación de conceptos, un modelo obligado cuando el aprendizaje individual es considerado? O en otras palabras, ¿es verdad que cuando una persona logra conocer una nueva noción matemática, la concepción operacional es a menudo la primera en desarrollar? Estas preguntas suponen un vaivén entre los aspectos epistemológicos y cognoscitivos del conocimiento matemático y nos ubica en los aportes de la historia a la educación matemática. Para poder dar respuesta a la prioridad del aspecto operacional sobre el estructural (o al contrario), es útil basarse en algún campo de la teoría del aprendizaje. Si los seres humanos a lo largo de la historia hemos aprendido de alguna manera, se manifestaría como un método genético de aprendizaje el que soporte las afirmaciones anteriores. Sfard respecto a esto apunta:

> “estamos basados en la suposición (la cual incidentalmente, parece subyacer en la mayoría de las investigaciones cognitivas desde Piaget) que en los procesos de aprendizaje -¡cualquier clase de aprendizaje!- ciertas características constantes

> pueden ser identificadas como fuertemente inmunes a cambios en los estímulos externos. La precedencia de las concepciones operacionales sobre las estructurales se presenta aquí como uno de tales invariantes." (Sfard, 1991)

Es decir, que en términos de aprendizaje, "lo operacional precede lo estructural" debería entenderse como una *prescripción* para enseñar. En los trabajos de Piaget se evidencia esto de una forma más clara, y en su libro sobre epistemología genética dice: "la abstracción [matemática] es extraída no desde el objeto sobre el que actúa, sino de la acción misma. Me parece que esta es la base de la abstracción lógica y matemática" (Piaget, 1970, pág. 16). Y aquí aparece una serie de condicionales: Si es verdad que el enfoque estructural es más abstracto que el operacional, si desde el punto de vista filosófico los números y las funciones no son básicamente nada más que procesos, si haciendo las cosas es la única forma para de algún modo "relacionarse con" los constructos abstractos; si todo esto es cierto, entonces, esperar que una persona pueda acceder a una concepción estructural sin el entendimiento operacional previo parece tan poco razonable, como esperar que él o ella comprendan el esquema de dos dimensiones de un cubo sin conocer su modelo "en la vida real" en tres dimensiones (Sfard, 1991).

En este sentido, Sfard propone que un concepto posee ciertas etapas de desarrollo (en donde está inmersa la idea de que un concepto pasa de ser un proceso a una entidad autónoma): *interiorización*, *condensación*, y *cosificación*.

En la etapa de *interiorización* el aprendiz se familiariza con los procesos, los que eventualmente darán origen a un nuevo concepto (como el contar lleva a los números naturales). Un proceso se ha interiorizado si "puede llevarse a cabo a través de representaciones [mentales]" (Piaget, 1970), y para ser considerado, analizado y comparado éste no necesita ser realizado actualmente.

La etapa de *condensación* es un periodo de secuencias prolongadas "comprimidas" de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa una persona llega a ser más y más capaz de pensar en un proceso dado como una totalidad, sin sentir un impulso de entrar en detalles. Este es un punto donde un nuevo conocimiento nace "oficialmente". Gracias a la condensación, combinar el proceso con otros procesos, hacer comparaciones y generalizar llega a ser más fácil.

Un progreso en la condensación se manifestaría también en la facilidad creciente de alternar entre representaciones diferentes del concepto. La etapa de condensación dura tanto como la nueva entidad permanezca estrechamente ligada a un cierto proceso. Solamente cuando una persona llega a ser capaz de concebir la noción como un objeto maduro, diremos que el concepto ha sido cosificado.

La fase de *cosificación* es el punto donde una interiorización de conceptos de nivel superior (aquellos que se originan en los procesos realizados sobre el objeto en cuestión) comienza. Aquí es donde se presenta el cambio ontológico profundo: un proceso se solidifica en un objeto, en una estructura interna estática.

2. PREHISTORIA DE LA INTEGRAL

El hombre es hombre por su prehistoria. Así mismo el concepto de integral existe por su prehistoria, allí podemos encontrar la huellas de la integral. En su prehistoria se van gestando algunos elementos teóricos que van a constituirse en la integral. Uno de tales elementos corresponde a las cuadraturas. La idea de cuadratura tiene sus inicios en el problema clásico griego de la cuadratura del círculo: Dado un círculo, encontrar un cuadrado equivalente. A pesar de que los antiguos no lograron resolver el problema de la cuadratura del círculo, nos interesa identificar los elementos teóricos que se fueron movilizando en los intentos de su resolución y que constituyen antecedentes de la noción de integral. La cuadratura de figuras rectilíneas fue una respuesta parcial que dio Euclides, pero fundamentalmente en sus *Elementos* dejó los aspectos conceptuales y el método, que es por excelencia, el método de medida de las magnitudes. Arquímedes retoma ese método, y basado en ello, logra encontrar la cuadratura de la parábola (figura no rectilínea) mediante dos métodos diferente: Método de los indivisibles y método de agotamiento. Esta última idea se formalizó con el método exhaustivo. En la línea de desarrollo de la integral, el método exhaustivo constituye la respuesta al problema de la medida de figuras planas en los antiguos griegos. Los antiguos no poseen la noción de integral, puesto que para ello se necesita formalizar una serie de elementos que se van forjando a lo largo de 25 siglos, pero aquí precisamente es donde yacen las huellas de esos elementos.

2.1. El antiguo problema de medir

Medir, contar y ordenar son prácticas tan antiguas como la matemática misma. No sólo son problemas de índole matemático, sino que son prácticas inherentemente humanas. Modernamente sabemos que el problema de medir consiste en poder asignar un número real positivo, que denominamos medida, a determinado conjunto.

Es decir, poder establecer una función medida de un conjunto A en $\mathbb{R}_0^+$ que cumpla determinadas condiciones, como son: la existencia de un conjunto cuya medida sea cero, que esta medida sea invariante bajo traslaciones y que sea sigma-aditiva. En la antigüedad poco se sabía de eso, pero muchos historiadores apuntan al hecho de que Tales de Mileto logró relacionar algunos resultados de su observación matemática para poder medir la altura de las pirámides de Egipto. Fue un gran aporte de Tales el poder extrapolar un problema de índole físico a uno matemático como lo es la semejanza de triángulo. Los Pitagóricos creyeron tener resuelto el problema de medir a través de relaciones entre los números enteros positivos y los segmentos. Para los Pitagóricos, dadas dos magnitudes, A y B, siempre era posible encontrar dos números naturales n, m tales que $mA = nB$. Es conocido que la crisis de los Pitagóricos se debió a la emergencia de las magnitudes inconmensurables, las cuales no cumplían esta propiedad.

El problema de la medida está íntimamente ligado al problema de la integral y es por ello que se hace referencia a este antiguo problema. Este problema hunde sus raíces en la antigüedad griega, fundamentalmente en la búsqueda de solución a los tres problemas clásicos: *cuadratura del círculo*, *trisección del ángulo* y *duplicación del cubo*. Primordialmente nos interesa el problema de la *cuadratura del círculo*. En la idea griega de la solución de estos problemas se perfilan Euclides y Arquímedes como grandes contribuyentes. Si bien, Euclides y Arquímedes no resuelven el problema, aportan a la humanidad los elementos conceptuales para poder resolverlo. Las raíces de la integral están en Euclides y Arquímedes.

2.2. Elementos conceptuales de la integral en Euclides

Euclides no logra cuadrar el círculo, pero logra establecer la cuadratura de figuras rectilíneas; y en su monumental obra *Elementos* busca darle salida al problema de las cuadraturas (Heath, 1956; Euclides, 1970; Euclides, 1971). La noción de integral está ligada al problema del área que a su vez está ligado al problema de las cuadraturas. En primera instancia, en la cuadratura de figuras rectilíneas no hay mucho problema, porque el problema de la cuadratura de figuras rectilíneas está ligada al cuadrado, problema que resuelve Euclides en la proposición 14 del libro II de los Elementos.

Proposición II,14: Dada una figura rectilínea, encontrar un cuadrado equivalente.

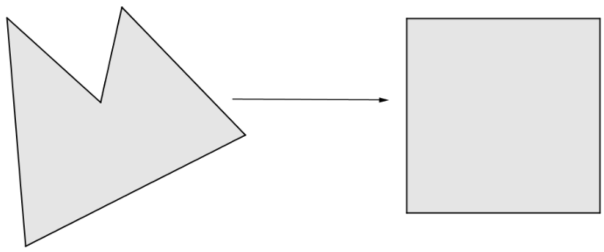


Figura 1. Cuadratura de figuras rectilíneas

Un contemporáneo de Sócrates llamado Antifone, llamó la atención en el hecho de que dado un polígono regular, si vamos duplicando sus lados, este se va acercando cada vez más al círculo. Siendo un poco sugestivos, $\lim_{n\to\infty} P_n = C$, donde P_n es un polígono de n lados.

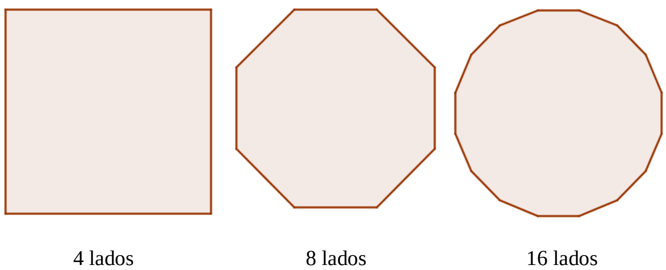


Figura 2. Observación de Antifone

Y como cada polígono es en sí figura rectilínea, se puede obtener un cuadrado equivalente, es decir, podemos acercarnos al círculo tanto como queramos. Pero para poder encontrar la cuadratura del círculo, ¿Cuántas veces tendrá Euclides que hacer el proceso de ir duplicando los lados? Actualmente sabemos que esto involucra un proceso infinito, algo que los antiguos evadían.

Como se puede apreciar, el problema de las cuadraturas de figuras rectilíneas lo resuelve Euclides. Sin embargo, la línea de desarrollo de la noción de integral no va por ese lado, sino por la línea de desarrollo de la cuadratura de figuras no rectilíneas a través del método exhaustivo, establecido por Euclides en la Proposición X.1 de los *Elementos*. La proposición X,1, que es el corazón del método exhaustivo, es justamente el método que finalmente va a usar Cauchy y Riemann en la definición de integral.

2.3. De Euclides a Arquímedes: las bases conceptuales del método exhaustivo

Euclides dedica sus cuatro primeros libros al estudio de la geometría plana, y sus últimos libros al estudio de la geometría del espacio. Sin embargo, es en la proposición X.1 de los *Elementos* que incluye la proposición fundamental del método exhaustivo.

Proposición X.1: Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda, una magnitud mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará al final una magnitud que será menor que cualquiera de las dos magnitudes dadas.

En términos modernos, tendríamos lo siguiente: Sean M_0 y ε dos magnitudes positivas dadas tal que $M_0 > \varepsilon$, y sea $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ una sucesión tal que $M_1 < \frac{1}{2}M_0, M_2 < \frac{1}{2}M_1, \ldots, M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n$ entonces $\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \varepsilon$. Euclides estaría dando una condición suficiente para que esta sucesión tienda a cero, esto es, $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

También demuestra, en el libro XII de los *Elementos*, que "Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros", evidenciando el siguiente hecho (visto desde una perspectiva moderna): dado un círculo C, una sucesión $\{P_n\}$ (estrictamente creciente) de polígonos inscritos en C, entonces $\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, C - P_n < \varepsilon$.

Estos son dos importantes ingredientes por los cuales puede decirse que los *Elementos* de Euclides constituye un primer tratado en donde existe una teoría de la medida inducida. Si bien, Euclides no logra contestar al problema de la cuadratura del círculo, sus respuestas parciales y los fundamentos conceptuales que desplegó, marcaron, en muchos aspectos, el derrotero de la evolución de las matemáticas durante más de veinticinco siglos (Recalde L. , 2007).

2.4. Las respuestas de Arquímedes

Dos aspectos importantes a resaltar de Arquímedes son, por una parte, que generaliza con resultados cuantitativos, un gran avance con respecto a la geometría sintética de Euclides que era puramente relativa; y por otro lado, es que trata de establecer un formalismo para los procesos infinitos. Recordemos que un gran resultado de los *Elementos* es la cuadratura de figuras rectilíneas, y uno podría pensar que como el círculo puede verse como un polígono de infinitos lados, entonces es posible realizar su cuadratura.

Vamos detrás de la formalización de procesos infinitos que se corresponde muy posteriormente con una nueva rama de las matemáticas cuyos objetos son las funciones e incorporando una nueva operación: el *paso al límite*. Esa rama es el Análisis y el *paso al límite* es la formalización al infinito potencial de la antigüedad.

Uno de los resultados más famosos de Arquímedes es el de la cuadratura de la parábola. Lo hace mediante dos métodos: El método mecánico y el método exhaustivo. El primero, entrevé una visión atomista del espacio y el segundo una visión continua del mismo.

2.4.1. El método mecánico

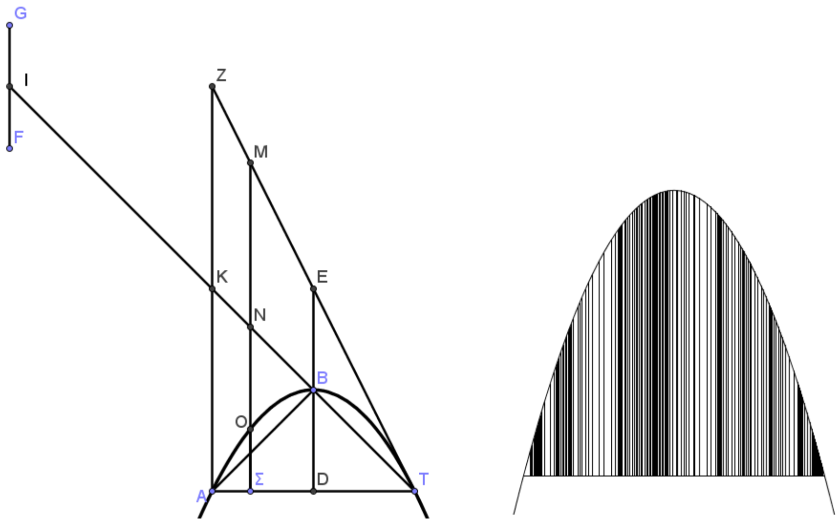


Figura 3. Método mecánico. Visión atomista

Sea el segmento parabólico ABC (acotado por AT). Arquímedes demuestra que el área de este segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ del triángulo inscrito ABC. Se apoya en la idea atomista de que si se toma el conjunto de todas las líneas que constituyen a la parábola como un todo, puede servir para hallar la medida de la figura. Un aspecto importante a resaltar es que Arquímedes no trabaja con la ecuación de la curva sino con propiedades de la curva. Lo que él hace es trabajar con elementos indivisibles y crea un mecanismo para poder hallar la suma de todos estos elementos indivisibles[2]. Para ello usa medios mecánicos. Arquímedes está ideando un formalismo para poder sumar las líneas y con base en esas líneas tiene un presupuesto: al sumar todas esas líneas va a encontrar la medida de la cuadratura de la parábola[3].

En Arquímedes se podría pensar en una idea subyacente de un plano cartesiano (las rectas AZ y AT) y de una suma infinita de elementos indivisibles, que si bien conllevan a un problema de homogeneidad, son la base heurística de la idea de la suma moderna de la integral cuando la norma de una partición tiende a cero.

2.4.2. El método exhaustivo

Euclides dio en sus *Elementos* las bases conceptuales del método exhaustivo, pero quién lo formaliza como proceso matemático es Arquímedes.

Haciendo cierta transposición, tenemos lo siguiente:

Sea una región no rectilínea R.

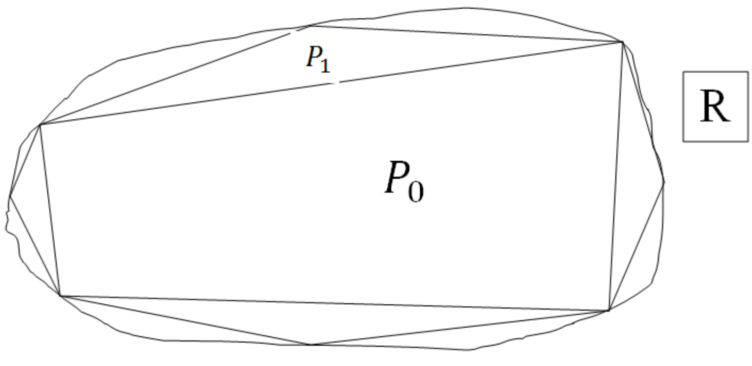


Figura 4. Método exhaustivo aplicado a una figura en general.

---

[3] Para Arquímedes, al igual que Aristóteles, el continuo no está hecho de indivisibles. No se profundiza en esta idea pues no es el objetivo de la tesis, pero esta heurística de suma es importante en la constitución histórica de la medida y la integral. Posteriormente, con Cavalieri se aclarará más este punto.

Se define una sucesión de polígonos $P_0, P_1, \dots, P_n$, donde $\{P_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente. Se define una sucesión de diferencias como sigue: $M_0 = R - P_0, M_1 = R - P_1, \dots, M_n = R - P_n$, que es una sucesión estrictamente decreciente, donde se tiene que:

$$M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n$$

que corresponde al principio de Eudoxo (proposición X,1) de los *Elementos*.

Tenemos entonces que si:

$$\left(M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n\right) \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, M_n < \varepsilon$$

$$(\{P_n\} \rightarrow P) \text{ entonces } \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+, P - P_n < \varepsilon$$

Entonces

$$R = P$$

Si suponemos que $R > P$, entonces $R - P > 0$. Por tanto, existe n tal que $R - P_n < R - P$, de lo que se tiene que $P_n > P$. $\rightleftarrows$.

Si suponemos que $P > R$, entonces $P - R > 0$. Por tanto, existe n tal que $P - P_n < P - R$, de lo que se tiene que $P_n > R$. $\rightleftarrows$.

Por tanto, $R = P$. ■

Esto es de suma importancia, pues se está demostrando que una figura curvilínea se puede *agotar* con polígonos inscritos haciendo que la diferencia entre la figura R y la sucesión $\{P_n\}$ de polígonos sea *tan pequeña como se quiera*. Cualquier parecido con la integral de Riemann no es pura coincidencia: estos son los elementos primigenios de la Integral de Riemann.

Aplicando este método, Arquímedes resuelve rigurosamente el problema de la cuadratura de la parábola.

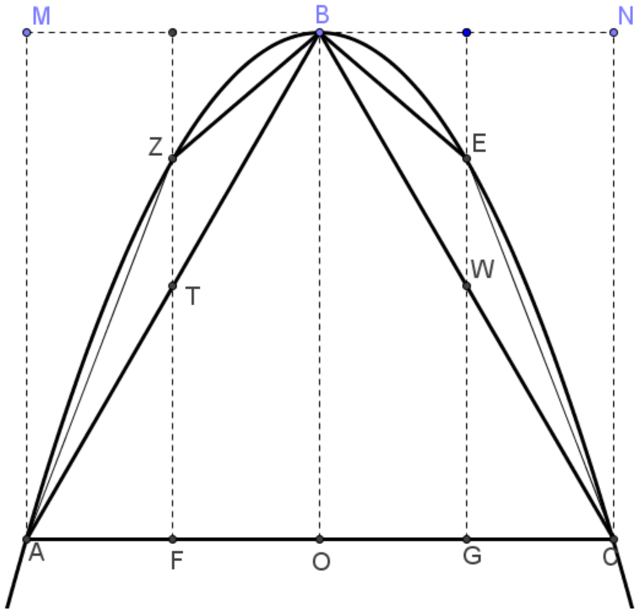


Figura 5. Cuadratura de la parábola, método exhaustivo.

Un aspecto a resaltar es que la inscripción de esos polígonos no se hace de cualquier manera. La forma de inscribir estos polígonos es por medio de una sucesión que cumpla las hipótesis de la proposición X,1 de los *Elementos*. Esto es para poder asegurar que en un proceso infinito se logre la cuadratura.

Sea ABC la parábola, donde B es el vértice. A continuación, Arquímedes inscribe el ΔABC donde O es el punto medio de AC. Sea F punto medio de AO. Se traza una perpendicular que intercepta la parábola en Z, y se construye el triángulo AZB y análogamente con OC, creando la siguiente sucesión:

$$P_0 = \Delta ABC$$

$$P_1 = P_0 + \Delta AZB + \Delta BEC$$

De la misma forma para $P_2, \dots, P_n$. *Para* esto se divide AC en cuatro partes iguales y se trazan FZ, GE paralelas a OB. Y así, logra crear una sucesión estrictamente creciente de polígonos inscritos en la parábola, y demuestra que efectivamente esta sucesión cumple con el principio de Eudoxo (proposición X,1 de los *Elementos*). Después de algunos cálculos, Arquímedes demuestra que el área de un segmento parabólico es igual a $\frac{4}{3}$ del área del triángulo inscrito en la misma, y como Euclides ya logró la cuadratura de figuras rectilíneas, Arquímedes ha encontrado la cuadratura de la parábola.

Retomemos un poco lo dicho. ¿Tiene Arquímedes la integral? Sabemos que Arquímedes no tiene la integral, pero ha entendido que la línea de desarrollo de las cuadraturas se perfila por el método exhaustivo.

3. LA INTEGRAL EN EL SURGIMIENTO DEL CÁLCULO

Muchos historiadores no están de acuerdo sobre quién fue el primero o los primeros que establecieron la forma del cálculo diferencial e integral como se reconocen actualmente. Muchos matemáticos se comprometieron con la empresa de las cuadraturas y establecieron mecanismos de resolución de las mismas. Criticaban el método de doble reducción al absurdo de Arquímedes (demostrar que la figura no podía ser menor ni mayor al "limite presupuesto") por ser muy abstruso. El rigor brilló por su ausencia y los matemáticos le interesaban más el descubrir que el demostrar. En palabras de Gonzales Urbaneja: "Todo ello al inmenso precio de dar la espalda al pasado y aceptar el buscar la justificación de los métodos nuevos en la fecundidad de los resultados y no en el argumento riguroso". Descartes, a través de la geometría analítica, cambió la forma de hacer matemáticas: de lo sintético a lo analítico, el problema de las cuadraturas pudo ser visto de otra manera: Encontrar el área bajo una curva regida por una ecuación cartesiana. Esto permitió que el problema se abordara de una manera analítica, permitiendo fecundidad en sus mecanismos de resolución. Muchos matemáticos establecieron una serie de herramientas que posteriormente fueron sistematizadas y presentadas con cierta carga teórica que ameritaba tratamientos especiales. Este trabajo de sistematización fue llevado a cabo por Newton y Leibniz.

3.1. Técnicas de causalidad

En la línea de desarrollo de la integral, la solución al problema de las cuadraturas se corresponde con la constitución histórica del Cálculo como rama de las matemáticas. Esto no fue obra de un solo hombre, ni de un solo momento; sino que fue un proceso de sistematización progresiva respondiendo a una serie de técnicas de causalidad.

3.1.1. La curva como ecuación (geometría analítica de Descartes)

Euclides, Arquímedes y Apolonio fueron las tres grandes lumbres de la antigüedad griega, el triunvirato griego. Ellos desarrollaron un sinnúmero de resultados geométricos, todo basado en una geometría puramente sintética. Las curvas se caracterizaban por medio de la noción de lugar geométrico; por ejemplo, círculo es aquel conjunto de puntos equidistantes de un punto llamado centro. Las secciones cónicas, se definían como cortes transversales de un plano a un cono, y dependiendo de la forma en que este plano cortara el cono salía la circunferencia, la parábola, la elipse, etc.

En el año 1637 se publica un libro que cambia la manera de hacer matemáticas. En su *Discurso del Método*, Descartes propone un método general de conocimiento, y la forma en la cual los problemas se pueden abordar usando dicho método. Uno de los apéndices del *Discurso del Método* es *La Geometría*. La idea de Descartes fue aplicar las ideas del álgebra renacentista a los problemas geométricos y que ambas se complementaran.

> Si entonces, deseamos resolver algún problema, primero suponemos que ya disponemos del problema y damos nombre a todas las líneas que parecen ser necesarias para su construcción, tanto a aquellas que son desconocidas como a las conocidas. Entonces, sin hacer distinción entre las líneas conocidas y desconocidas debemos desembrollar la dificultad en cualquier manera que muestre más naturalmente las relaciones entre esas líneas, hasta que nos sea posible expresar una cantidad de dos formas. Esto constituirá una ecuación, dado que los términos de una de esas dos expresiones son, en conjunto, igual a los términos de la otra. (Descartes, 1637)

Esto significó un cambio radical en la representación matemática y en nuestro caso particular, de la integral: de lo sintético a lo analítico el problema de las cuadraturas se puede reinterpretar en el problema de hallar el área bajo una curva regida por una ecuación cartesiana. Esta ecuación podría interpretarse, modernamente, como $F(x,y) = 0$.

Toda esta geometría analítica fue posible gracias a la generalización de las operaciones vía algebraica. Por ejemplo, el producto de segmentos no tenía sentido en la geometría de Euclides, pero en la geometría de Descartes la multiplicación de segmentos da como resultado otro segmento, el cual es el cuarto proporcional de los segmentos multiplicados junto con otro segmento arbitrario llamado unidad. Las operaciones seguían perteneciendo al mundo de lo geométrico, pero con una representación más potente como lo fue la representación algebraica. Así, si se trataba de encontrar la recta tangente a la curva en un punto P, de abscisa $x = X$, a una curva expresada por una ecuación entera y homogénea $F(x,y) = 0,$ referida a un sistema de ecuaciones cartesianas $\langle r, A, \phi \rangle$ (en donde r es la recta tomada como eje del sistema, A es el punto sobre dicha recta que constituye el origen, y ϕ es el ángulo formado por la ordenada con la recta r), sería posible extraer de dicha ecuación una expresión algebraica $G(X)$, para lo cual se seguiría un procedimiento que asegurara que el segmento resultante del segmento X, operando sobre tal segmento como la expresión lo indica, fuese igual, por ejemplo, a la subtangente relativa a tal punto. No se ha desaferrado de la geometría del problema, existe es un cambio de representación del problema, pero las operaciones realizadas desde el álgebra vuelven a comprobarse en la geometría, notando que precisamente funcionan. Esta es la potencia del método cartesiano. Finalmente, en el ejemplo que se mencionaba, después de una serie de cálculos algebraicos –y desde el álgebra– en la ecuación $F(x,y) = 0$, se pudiese escribir $stg_x = g(X)$, en donde esto significaba haber indicado un modo efectivo para construir la subtangente y, por lo tanto, la tangente en el punto M a la curva en dicha función. Con la geometría analítica se clarificó la relación entre curvas y ecuaciones y, a comparación de la antigüedad, emergió un gran sin número de curvas a ser tratadas.

Cualquier parecido con el tratamiento actual de las funciones no es pura coincidencia, estos son los elementos anteriores a las funciones. Claro está, aunque es un nuevo modo de hacer geometría, sigue siendo un modo de hacer geometría. Hay un cambio de representación en los problemas, pero siguen siendo problemas tratados desde lo geométrico, aunque con un cambio de representación potente que permite facilidad en los cálculos, y no llevar a cuestas la pesada carga de la geometría sintética. Hasta aquí, no hay análisis todavía, pues en efecto se sigue haciendo geometría; y vamos detrás de aquella rama de las matemáticas cuyos objetos son las *funciones*. Por más que exista una generalización de los procesos geométricos, esta extensión no garantiza la existencia de un buen asidero para una nueva teoría matemática, es decir, se necesita la constitución de nuevos objetos matemáticos, nos referimos precisamente a las funciones.

3.1.2. Los indivisibles de Cavalieri

Cavalieri se considera uno de los precursores del cálculo infinitesimal y es clave en la constitución histórica de la integral dado que en él subyacen las huellas de la integración de polinomios. Su teoría es la de los indivisibles. Los indivisibles son elementos de una dimensión inmediatamente menor. Para él sería algo como lo siguiente:

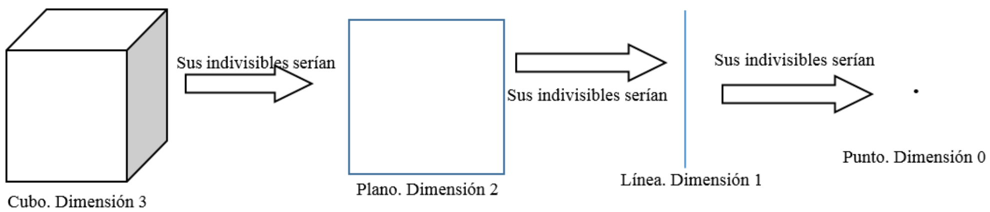


Figura 6. Indivisibles de Cavalieri

Para Cavalieri el medir radica en el poder hacer una conveniente comparación. Si bien, aunque para Cavalieri el continuo no está hecho de indivisibles, él parte de la idea de que los indivisibles son suficientes para calcular la medida y poder hallar la cuadratura de figuras.

Es de resaltar que Cavalieri no está sumando indivisibles, él lo que hace es una comparación por medio de sus indivisibles deduciendo la extensión de una mediante la otra. En términos generales, se basa en procedimientos algebraicos para encontrar la cuadratura de algunas curvas cartesianas, en donde abandonando el método de exhaución, razona de manera analítica en vez de manera sintética. Usando una herramienta auxiliar llamada *regula*, y basado en una suma actual de líneas a la que llama *ominus*, encuentra que la suma de todas las líneas genera un plano, la suma de planos genera un volumen, y así sucesivamente.

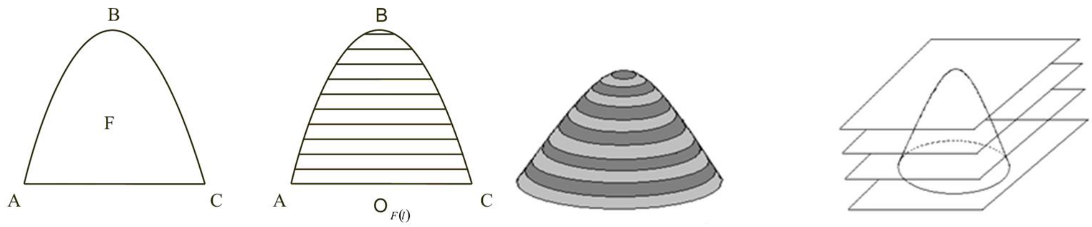


Figura 7. Ominus Linae (suma de todas las lineas) y *Ominus quadratum* (suma de todos los planos)

Por tanto, $Omn(a) = a^2$ se entiende como que la suma de todas las líneas es una superficie de lado a, y basado en la simetría que se presenta en el cuadrado

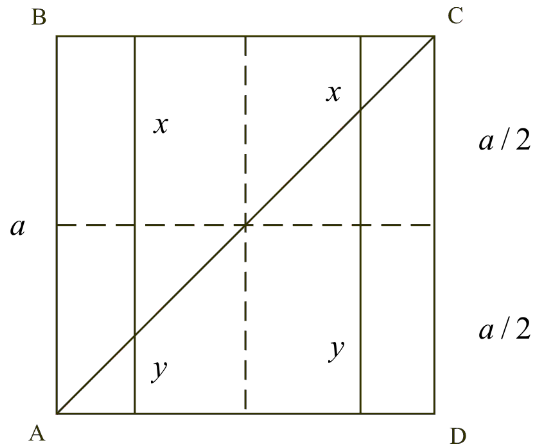


Figura 8. Método de Cavalieri

Concluye que $Omn(x) = \frac{a^2}{2}$ (como el área de un triángulo). Estos procedimientos los hace algebraicamente como en el caso de x^2, en donde concluye que $Omn(x^2) = \frac{a^3}{3}$, y así, hasta $Omn(x^9)$, generalizando que $Omn(x^n) = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Modernamente, lo que Cavalieri está encontrando es la correspondiente cuadratura de x^n (con n positivo porque emula la dimensión), o lo que, viéndolo en una notación tipo Leibniz-Fourier será $\int_0^a x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, es decir, las primeras integrales de polinomios de grado n.

Así como el método mecánico constituye el inicio del método de los indivisibles, el método exhaustivo lo es del de los infinitesimales. Por el ramal del método de los indivisibles, Cavalieri se basa en un procedimiento analítico para encontrar algunas cuadraturas más generales; y por otro lado, por el método de los infinitesimales, Kepler trabaja el problema suponiendo la existencia de rectángulos infinitamente pequeños. Latente a estos desarrollos se cuenta con la instauración de la geometría analítica de Descartes, logrando, que de lo sintético a lo analítico; el problema de las cuadraturas se convierta en el problema del área bajo la curva regida por una ecuación cartesiana. Es de resaltar el cambio cualitativo tan grande que existe, tanto en la forma de hacer matemáticas (de lo sintético a lo analítico) como en el desarrollo del cálculo de cuadraturas, dado que el álgebra le facilita la operación de suma de todas las líneas a Cavalieri, a diferencia de la suma de todas las líneas en Arquímedes mediante la heurística de la palanca.

En la línea de evolución del desarrollo de la integral como noción matemática, Cavalieri es muy importante, dado que él está estableciendo un mecanismo (está saliéndose un poco de lo geométrico y lo visual para entrar a lo analítico) en el sentido de que está hablando de figuras no solamente de 1, 2 y 3 dimensiones, sino de 4, 5 y más dimensiones. En Cavalieri no hay un desprendimiento de lo geométrico, lo que hay es una generalización. Es un cambio dialéctico que se está formando a nivel recursivo.

3.1.3. La cuadratura de la cicloide (Roberval)

Roberval fue uno de los herederos de las ideas de Cavalieri y con base a estas ideas, logró encontrar la cuadratura de la cicloide:

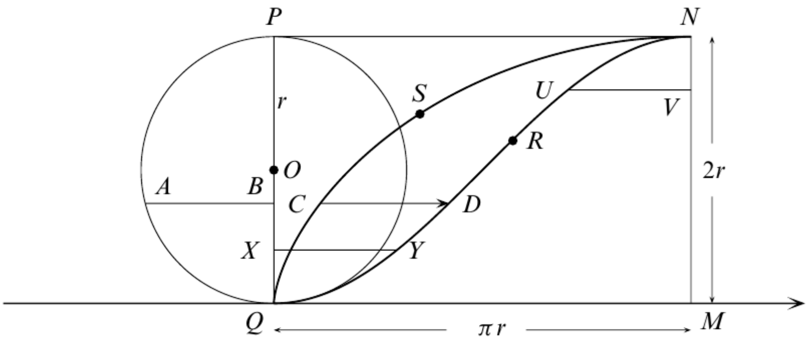


Figura 9. Cuadratura de la cicloide por Roberval

Sea la cicloide generada por el círculo con centro en O y radio r. El área del rectángulo $QMNP$ es el doble del área del círculo (porque la base del rectángulo es πr y la altura es $2r$. A continuación se construyen se construyen segmentos *indivisibles* AB desde el diámetro a la circunferencia y a partir de la curva cicloide se construyen segmentos iguales a los construidos desde el diámetro a la longitud de la circunferencia, es decir, por ejemplo, $AB = CD$, y así sucesivamente logrando la curva QRN, compañera de la cicloide. El área comprendida por la curva cicloide y su compañera será igual al área de la mitad del círculo, pues por construcción se hicieron las líneas *indivisibles* $CD = AB$, por tanto la *suma* de todas las líneas del semicírculo (como diría Cavalieri), serán iguales a la *suma* de todas las líneas de la cicloide.

Además, se puede observar que la curva compañera de la cicloide, divide al rectángulo $QMNP$ en dos áreas iguales, pues Roberval ya había demostrado que las secciones horizontales de altura a y $2r - a$ dan en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo segmentos iguales XY y UV. Entonces el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es $\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. Luego el área encerrada por un arco de cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.

El método utilizado por Roberval fue basado por el principio de los indivisibles de Cavalieri, el cual no se consideraba riguroso, y por ello no hubo mucha aceptación de los matemáticos hacia este método. La aceptación era debida al problema de homogeneidad presente en la manera en la cual los indivisibles daban lugar a un objeto de una dimensión mayor. ¿Cómo es posible que la suma de líneas generara un área? Una solución a este problema fue imaginar un rectángulo de una base *tan pequeña como queramos*.

3.1.4. La cuadratura de la hipérbola (Fermat)

El método de Roberval fue basado en indivisibles y Fermat, se basará en otro método para encontrar la cuadratura de la hipérbola $y = \frac{1}{x^2}$, que respete de cierta manera, el principio de homogeneidad del que se habló.

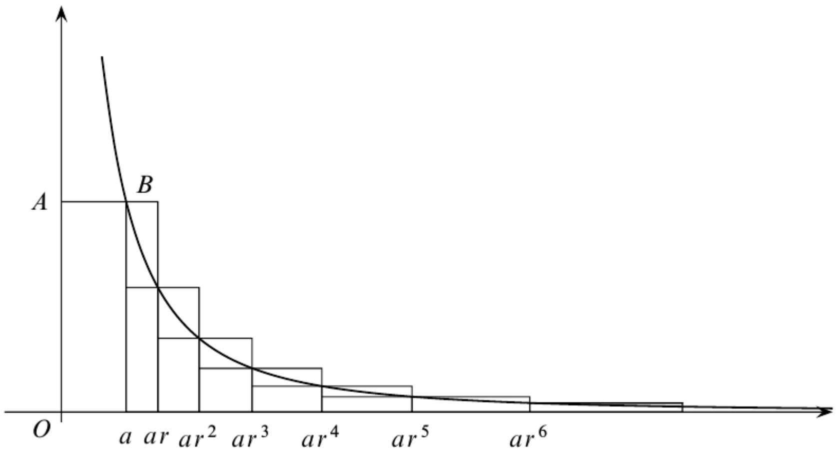


Figura 10. Cuadratura de la Hipérbola por Fermat

Fermat razona de la siguiente manera: Sea $r > 1$ y consideremos los puntos de abscisas a, ar, ar^2, ar^3,…. Debido al hecho de que $r > 1$, Fermat podrá apoyarse en un resultado de las progresiones geométricas menor que la unidad:

"Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes"[4]

Llamemos S a la suma de todos los sucesivos rectángulos inscritos $R_1, R_2, R_3, \ldots$. Ahora, como se trata de una progresión geométrica decreciente, se cumple que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$

[4] Aquí hay una especie de convergencia, comparando términos dos a dos.

De lo que se tiene entonces que

$$S - R_1 = \frac{1}{a} = OA \cdot A$$

Ahora, emulando un poco a Arquímedes, presupone un límite:

[…] si ahora añadimos [a ambos miembros de esta igualdad] el rectángulo R_1 que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes… No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente, excepto la que ha sido indicada [la hipérbola de Apolonio].

Tratando un poco el problema de Fermat mediante progresiones geométricas.

Sea $r > 1$ y consideremos los puntos de abscisas a, ar, ar^2, ar^3; entonces los triángulos inscritos en la figura tienen como área

$$(ar - a)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \cdots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k}$$
$$= \frac{1}{ar}$$

Y los triángulos circunscritos tendrán por área

$$(ar - a)\frac{1}{a^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \cdots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{r}{a}$$

Luego, el área bajo la curva estará acotada por estos dos valores. Llamando S el área bajo la curva, tendríamos entonces que:

$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}$$ [5]

Y como esta desigualdad es válida para todo $r > 1$, se concluye que $S = \frac{1}{a}$. Observemos que el valor del área bajo la curva calculado por Fermat coincide con el rectángulo $OABa$.

Entonces vemos cómo en Fermat subyacen los elementos de la integral definida, como actualmente los conocemos, inscribiendo/circunscribiendo rectángulos *infinitesimales* y presuponiendo el límite en el sentido de que cuando crece el número

[5] Muy similar a la idea de área acotada por dos valores.

de rectángulos inscritos, la diferencia entre el área bajo la curva y los polígonos, se puede hacer *tan pequeña como se quiera*. Hay una evolución de la forma de inscripción de figuras, que mientras en Arquímedes era por medio de una sucesión recurrente, aquí hay una idea de figuras inscritas de un grosor dado, y este grosor siendo cada vez tan pequeño como se quiera, emulando a la posterior "norma de la partición tendiendo a cero".

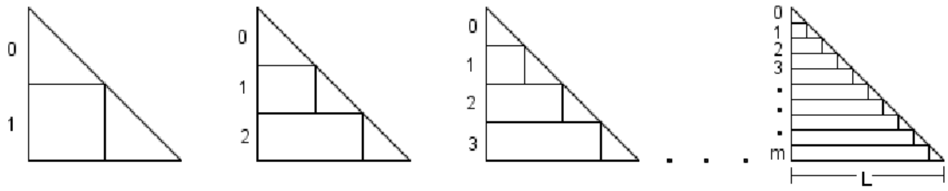
3.1.5. La integración aritmética de Wallis

El problema de las cuadraturas ha sido tratado por medio de razones geométricas, que permite comparaciones. Wallis considera que una mejor forma de abordar este problema es aritméticamente. Para llevar esto a cabo, relaciona el problema de las cuadraturas con el de las sumas de sucesiones que tienden a un límite único, buscando la razón existente entre la serie correspondiente a las líneas de la figura en cuestión, y la serie correspondiente a las líneas de un paralelogramo circunscrito a la figura. Toma como punto de partida los indivisibles de Bonaventura Cavalieri, y con base en este método –renovado– demuestra que un triángulo es a un paralelogramo (de la misma base y la misma altura) como 1 es a 2. En su libro *Aritmética de los Infinitesimales* afirma lo siguiente:

> …si un triángulo con altura A y base B, se inscriben paralelogramos, cada uno de los cuales tiene altura $\frac{1}{\infty}A$, y el aumento de anchura es $\frac{1}{\infty}B$, la altura inscrita será $\infty \times \frac{1}{\infty}A$, y la base no será B, pero sí $B - \frac{1}{\infty}B$.[6]

Si se hace una interpretación geométrica de lo que Wallis afirma, se puede afirmar que el número m (que él usó para el número de términos para poder llegar a la expresión $\frac{1}{2}ml$) correspondería al número de rectángulos y l correspondería a la altura del último rectángulo de la sucesión, de esta manera se puede afirmar que $m = \left(\infty \times \frac{1}{\infty}m\right)$, es la altura del triángulo, y $l = l - \frac{1}{\infty}l$, la base; por lo que Wallis en esta proposición estaría dando la fórmula del área del triángulo $\frac{m \times l}{2}$.

[6] Citado por (Bobadilla, 2012)



$$m = \left(\infty \times \frac{1}{\infty} m \right), L = L - \frac{1}{\infty} L$$

Figura 11. Área del triángulo. Tomado de (Bobadilla, 2012)

De esta forma, en la siguiente proposición Wallis establece que el área del paralelogramo de base l y altura m, es $m \times l$.

En la línea de desarrollo del problema de la integral, es profundamente significativa la instauración de esta fórmula, pues está estableciendo un valor numérico a una cuadratura. Wallis está asignando un valor numérico a un producto de elementos que bien pueden ser infinitesimales. Esta idea madura un poco más en la noción de integral, dado que ésta se define como un límite de suma de productos que pueden ser tan pequeños como se quiera $f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, y con Wallis se gana en poder efectivamente realizar ese producto. Estos son elementos que jugaron un papel importante en la conceptualización de la integral definida.

Es un buen momento para hacer un alto. Euclides ha resuelto el problema de la cuadratura del rectángulo, Arquímedes hizo lo mismo para la parábola, Cavalieri hizo un gran aporte generalizando la cuadratura de curvas de la forma x^n donde n es un entero positivo (dado que n emula la dimensión), Roberval encuentra la cuadratura de la cicloide y Fermat la de la hipérbola. Los procedimientos son diferentes e independientes (no es el mismo proceso de la cuadratura de la parábola que el de la hipérbola). Los matemáticos son consientes de que existe un problema (el problema de las cuadraturas) pero existe una serie de mecanismos independientes de resolución del problema y para casos muy particulares de curvas. Es necesaria una sistematización de todas estas técnicas, permitiendo lograr que ellas vayan pasando de lo particular a lo general y así, a un algoritmo de resolución. Este trabajo de sistematización fue llevado por Newton y Leibniz.

3.2. Salida al problema de las cuadraturas

Siguiendo en cierta forma todos los elementos conceptuales ganados hasta el momento, Newton y Leibniz se comprometieron con la empresa de las cuadraturas, estableciendo unos métodos para poder hallar cuadraturas y anticuadraturas de expresiones analíticas. Los problemas presentados se debieron a que, por una parte Newton empleó ciertas cantidades (muy extrañas, especialmente para Berkeley, que las llamó "fantasmas de las cantidades evanescentes"); y por otra parte Leibniz, que usó su triángulo característico, el cual era un triángulo infinitesimal. Problemas como estos dan lugar a la falta de rigor de estos métodos y se necesitan fundamentar sobre bases bien establecidas.

3.2.1. Una mirada al *De Methodis* de Newton

Para Newton, las curvas son generadas por un movimiento continuo (que fluyen). A aquellas curvas, las llamó fluentes y sus velocidades las llamó fluxiones. Así, en su *De Methodis*, presenta los siguientes problemas

1. Dada de manera continua la longitud del espacio recorrido, esto es, en todo instante de tiempo, encontrar la velocidad de movimiento en cualquier tiempo propuesto.
2. Dada de manera continua la velocidad del movimiento, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto.

Newton está presentando dos problemas inversos, es decir, dada la relación entre las *fluentes* determinar la relación de sus *fluxiones* y viceversa. Es curioso ver que Newton relaciona estos problemas con el trazado de tangentes y el área bajo la curva, es decir, relaciona el hecho de trazar la recta tangente a la curva en un punto con el de hallar la velocidad a la cual ha sido generada esta. Es una de las primeras versiones del teorema fundamental del cálculo.

De la tradición de Descartes de asociar a la curva una ecuación, consideremos la ecuación $y = x^2$. Newton lo expresa de la siguiente manera:

> Así, en la ecuación $x^2 = y$ si y designa a la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo, el cual es medido y representado por un segundo espacio x, conforme éste se incrementa con velocidad uniforme, entonces $2\dot{x}x$ designará la velocidad con la cual es espacio y será descrito en el mismo momento del tiempo[7]. Y es por esto que en lo que sigue se considera a las cantidades como si fueran generadas por incrementos continuos, a la manera de un espacio descrito por el recorrido de un objeto que se mueve. (Newton, 2001).

Y así, presenta el universo de las cantidades constantes y las cantidades fluyentes con las primeras (a, b, c, etc.) y últimas letras (x, y, z, etc.), respectivamente. A cada fluyente (x, y, z, etc.) le corresponde una velocidad, esto es, una fluxión ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, etc.). A la variación de la variación de la velocidad, la denotará con dos punticos arriba ($\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, etc.) y así sucesivamente ($\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{y}$,…).

Newton presenta ahora el primer problema:

Problema 1. Dada la relación de las cantidades fluyentes entre sí, determinar la relación de las fluxiones.

Para resolver este problema, muestra algunos ejemplos:[8]

Ejemplo 1. Si la relación de cantidades x y y es

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

se multiplican los términos dispuestos primero conforme a x y después conforme a y en esta forma:

Multiplico

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3$$

por

[7] En términos modernos, Newton está encontrando las derivadas parciales: Si $f(x) = x^2$, entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = 2x\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$, en donde $\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}$

[8] Tomado de (Newton, 2001).

$$\frac{3\dot{x}}{x}\cdot\frac{2\dot{x}}{x}\cdot\frac{\dot{x}}{x}\cdot 0$$

Llegando a lo siguiente[9]:

$$-3\dot{x}x^2 - 2\dot{x}ax + \dot{x}ay \quad (*)$$

Multiplico

$$-y^3 + axy - ax^2 + x^3$$

Por

$$\frac{3\dot{y}}{y}\cdot\frac{\dot{y}}{y}\cdot 0$$

Llegando a:

$$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x \quad (**)$$

La suma de ambos productos $(*)$ y $(**)$ es

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$$

que es la ecuación que da la relación entre las fluxiones $\dot{x}$ y $\dot{y}$: puesto que si se asume para x un valor arbitrario, la ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dará el valor de y, y una vez determinado esto se tendrá

$$\dot{x}:\dot{y} = (3y^2 - ax) : (3x^2 - 2ax + ay)$$

Modernamente, este resultado corresponde al cociente de las derivadas parciales de la función inicial.

Newton logró dar con un procedimiento algorítmico, basado en la idea de los *momentos*[10] de las cantidades fluyentes. Si por ejemplo, tomamos una cantidad particular x, su momento, se expresará por el producto de su velocidad $\dot{x}$ y de una cantidad infinitamente pequeña o (esto es, por $\dot{x}o$). Ahora, como los momentos $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, de las cantidades fluyentes x, y, son las porciones infinitamente pequeñas con las

[9] Newton está multiplicando cada término con su correspondiente (al cual está involucrada la fluxión), es decir, x^3 con $\frac{3\dot{x}}{x}$, $-ax^2$ con $\frac{2\dot{x}}{x}$, axy con $\frac{\dot{x}}{x}$, y el término $-y^3$ al no tener "velocidad en la cantidad x" será con 0.

[10] Para Newton, el momento de una cantidad es el producto de su fluxión y el incremento infinitamente pequeño en el tiempo.

cuales, al ser añadidas, aquellas cantidades se incrementan durante cada intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se sigue que aquellas cantidades x y y, después de un intervalo infinitamente pequeño de tiempo, se convierten en $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ como entre x y y, y así se podría sustituir x y y, por $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ en la ecuación dada. Newton vuelve a tomar el ejemplo anterior, y lo resuelve aplicando lo dicho:

Sea la ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

y si se sustituye $x + \dot{x}o$ en lugar de x y $y + \dot{y}o$ en lugar de y; y de ahí se tendrá

$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0.$

Por hipótesis se tiene: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, y cuando estos términos son eliminados y lo que queda se divide por o, quedará

$$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^3 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^2 = 0$$

Pero además, como o se ha supuesto que es infinitamente pequeño para así poder expresar a los momentos de las cantidades, los términos que la tienen como un factor serán equivalentes a cero con respecto a los otros. Por ello se eliminan y únicamente queda:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0,$$

como en el ejemplo 1. Dice Newton con respecto a esto:

> Se puede observar por consiguiente que los términos no multiplicados por o siempre se desvanecen, al igual que aquellos multiplicados por o elevado a una potencia mayor que uno, y los términos restantes, después de la división entre o, toman la forma que deberían tener de acuerdo con la regla. Esto es lo que se quería mostrar. (Newton, 2001)

En el siguiente método, nos detendremos un poco, puesto que hablaremos de la manera en la cual Newton resuelve el problema inverso al anterior, es decir, el problema relativo a la integración. Newton hace una pequeña variación del problema 2:

Problema 2. Cuando se exhibe una cantidad fluyente, y está dada la relación de sus momentos con los de otra cantidad fluyente, encontrar la relación de las cantidades entre sí.

> Multiplíquese por la cantidad exhibida el valor de la razón de los momentos de la cantidad buscada a los momentos de la cantidad exhibida, en tanto que esté libre de irracionales y no esté afectada por algún denominador de varios términos divídase luego cada término individualmente entre su propio número de dimensiones, y lo que resulte será el valor de la cantidad buscada. (Newton, 2001)

Tomemos el caso más sencillo de todos, por ejemplo, si la relación de los momentos es x, esto es, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x$, sería la relación de los momentos de la cantidad buscada, y lo multiplicamos a la cantidad exhibida[11], es decir x, resultando parcialmente x^2. Ahora, a este resultado, se le divide por el número de su dimensión, es decir 2, resultando finalmente $\frac{x^2}{2}$.[12]

Para mostrar este método, Newton inicia con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Si se da

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x}{a}$$

se multiplica $\frac{x}{a}$ por x lo cual da $\frac{x^2}{a}$.

Como x es de dos dimensiones, se divide entre 2 y resulta

$$\frac{x^2}{2a}$$

[11] Aquí Newton está asegurando que el valor debe ser de *una dimensión inmediatamente mayor* a la dada. Es decir, la relación inversa a la establecida en su *De Analysi* en donde se podría particularizar el resultado de que $(x^n) = nx^{n-1}$, que sería la derivada.

[12] En términos modernos, Newton estaría resolviendo $\int x\, dx$ en términos de ecuaciones. Siendo un poco sugestivos, Euclides ya había *resuelto* esto geométricamente.

que se iguala a y.[13]

En este sentido, Newton enuncia la solución a su segundo problema

Problema 2. Cuando se exhibe una ecuación que involucra a las fluxiones de ciertas cantidades, determinar la relación de las cantidades entre sí.

Newton lo resuelve de la siguiente manera:

> Debido a que este problema es el converso del anterior, puede ser resuelto de la forma contraria; es decir, acomodando los términos multiplicados por $\dot{x}$ de acuerdo a las dimensiones de x y dividiendo entre $\frac{\dot{x}}{x}$ y luego entre el número de las dimensiones, o por otra progresión aritmética, realizando la misma operación en los términos multiplicados por $\dot{v}, \dot{y},$ o $\dot{z}$, y eliminando los términos redundantes, poniendo el total de los términos resultantes igual a cero. (Newton, 2001)

Ejemplo. Cuando se da la ecuación

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$$

se procede de esta manera:

Dividiendo

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$$

por $\frac{\dot{x}}{x}$ se obtiene

$$3x^3 - 2ax^2 + axy$$

después se divide[14] por 3, 2, 1, obteniendo

$$x^3 - ax^2 + axy$$

---

[13] Estamos *ad portas* de algoritmos de solución de algunas ecuaciones diferenciales sencillas, como sería el método de separación de variables. Si traducimos el lenguaje de Newton como se ha mostrado en los pies de páginas anteriores, y reinterpretamos su definición de $\dot{x}$ y $\dot{y}$ por $\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}$ y $\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}$, respectivamente; podríamos ver que (teniendo en cuenta la naturaleza de las variables) que $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}$, y teniendo que $a \int dy = \int xdx$, sería $ay = \frac{x^2}{2}$, obteniendo que $y = \frac{x^2}{2a}$.

[14] Análogamente como en el ejemplo anterior, es decir, término a término según corresponda la dimensión.

De igual forma para los términos de y, pero en este caso por $\frac{\dot{y}}{y}$ y dividiendo en este caso por 3 y 1, obteniendo finalmente

$$-y^3 + axy$$

Y sumando finalmente los resultados en las cantidades x y y, se obtiene finalmente

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

que era la relación buscada[15].

Newton continúa la obra de su *De Methodis* resolviendo algunos problemas clásicos del hoy conocido Cálculo Diferencial e Integral y muestra los métodos para resolverlos. En su **PROBLEMA 3. DETERMINAR MÁXIMOS Y MÍNIMOS**, Newton muestra que el problema se resuelve encontrando la fluxión de las cantidades involucradas e igualando a cero; método que corresponde al actual: "Derivar e igualar a cero". El **PROBLEMA 4** trata de **TRAZAR LAS TANGENTES DE LAS CURVAS**, expresando que se reduce al problema ya resuelto de encontrar las fluxiones[16]. En su **PROBLEMA 5. ENCONTRAR LA CURVATURA DE CUALQUIER CURVA EN UN PUNTO DADO**, relaciona muchos hechos interesantes desde el punto de vista de la *geometría diferencial*, en la cual se encuentran muchos esbozos en sus *Principia*. En la solución a este problema, muestra algunos resultados como dados, como que la curvatura de un círculo es igual en todos sus puntos, algunas referencias de ortogonalidad y rectificación de curvas, y clasifica algunos tipos de curvatura. Ya en su **PROBLEMA 6**, Newton muestra cómo determinar el tipo de curvatura en cualquier curva; y así, va presentando

[15] Newton hace la aclaración, de que aunque el término axy aparece dos veces, no debe ponerse dos veces en el total, puesto que se deja de un lado un término por ser redundante. Entonces siempre que algún término aparezca dos veces, o cuando varias cantidades fluyentes estén involucradas, se escribe sólo una vez en el total de los términos. Estos ejemplos suponen relaciones sencillas, tomadas para ilustrar los métodos de Newton. En su *De Methodis* Newton establece condiciones de solución para ecuaciones en donde están involucradas varias fluxiones, que se escapan de los objetivos de este escrito. Más detalles se pueden consultar en (Newton, 2001).

[16] Newton muestra el algoritmo dado por Hudden aplicado a las tangentes. También se ha basado en algunos algoritmos de Fermat para máximos y mínimos y otra serie de técnicas establecidas hasta el momento. En este sentido es que muchos historiadores apuntan a decir que Newton sistematizó una serie de técnicas para resolver algunos problemas concernientes al Cálculo.

alguna serie de problemas de gran relevancia en el Cálculo Diferencial. Es de interesante discusión el hecho de que Newton usa la frase *cualquier curva* para presentar sus soluciones. Uno al respecto podría preguntarse: ¿Si Newton está estableciendo una serie de algoritmos para *cualesquiera curvas*, entonces por qué no dan finalmente resueltos estos problemas del análisis? Notemos que Newton está estableciendo una serie de algoritmos para ecuaciones sencillas de polinomios, para el cual el algoritmo geométrico visto en su lenguaje analítico funciona perfectamente. Uno de los problemas para aceptar esto sería que Newton no está estableciendo un algoritmo para un dominio más general de curvas que simplemente las polinómicas. En este sentido es que para poder establecer una rama autónoma de las matemáticas en donde este tipo de problemas puedan solucionarse es necesaria la incorporación de nuevos objetos que no son sencillamente curvas, en donde las curvas son referentes geométricos de estos nuevos objetos: nos referimos exactamente a las funciones.

3.2.2. Una mirada al trabajo de Leibniz

Leibniz aborda el problema de las cuadraturas de una forma distinta al de Newton pero logrando resultados similares. Para Newton, el objeto de la operación cuadratura (posterior integración) era hallar una cantidad fluente de una fluxión dada, que posteriormente se corresponderá con la solución de ecuaciones diferenciales. Para Leibniz, la cuadratura era una suma, en donde la acción era sumar y tomar diferencias, en donde la relación de esto con el teorema fundamental era inmediata. Consideremos la curva cerrada compuesta por la curva OCB y los ejes coordenados.

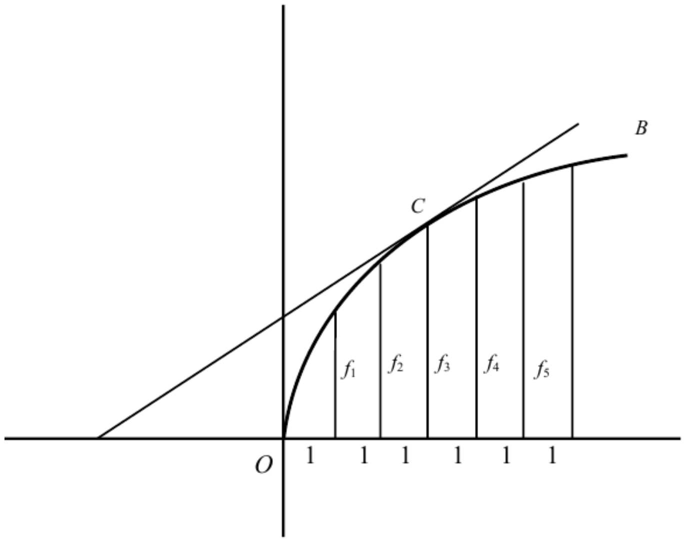


Figura 12. Relación inversa en Leibniz

A partir de la curva se define una sucesión de ordenadas equidistantes, con una separación de una unidad entre ellas. La cuadratura de la curva en cuestión corresponde aproximadamente a la suma de las ordenadas, y la diferencia entre dos ordenadas consecutivas da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente. Se seguirá entonces, que mientras más pequeña sea la unidad, mejor será la aproximación; siendo que, si es una cantidad *infinitamente pequeña* la suma de las ordenadas será igual a la cuadratura y la diferencia de dos ordenadas consecutivas será igual a la pendiente.

Con este pensamiento, Leibniz descubrió muchas relaciones en el Cálculo de cuadraturas, realizó algunas operaciones que se corresponden con la actual integración por partes e inauguró un método denominado el método de transmutación, que le sugirió que el cálculo analítico para los problemas de cuadraturas debería incluir un sistema adecuado de símbolos y reglas, siendo el aporte más significativo de Leibniz en la constitución histórica de la integral. Muy relevante en la constitución histórica de la integral es el hecho de que Leibniz recoge la tradición de los indivisibles de Cavalieri e incorpora la notación que se inmortalizará para el proceso de integración.

“Sería conveniente escribir «∫» en lugar de «omn.» de tal manera que $\int l$ represente omn. l, es decir, la suma de todas las l”. Citado por (Grattan-Guiness, 1982).

Haber incorporado una notación exclusiva para esta operación, es un hecho epistemológicamente significativo, dado que se está incorporando un símbolo en donde lo reconoce como una operación autónoma de las matemáticas. Esta notación de una S en forma de bastardilla (del latín *summa*), es muy adecuada porque lleva toda la carga geométrica y analítica de la integral: Suma de elementos infinitamente pequeños. Luego el problema de las cuadraturas para Leibniz es un problema de suma de sucesiones, para el cual se debe elaborar un *cálculo*, es decir, un conjunto de algoritmos eficaces.

Con base en ello, hace notar que

$$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

Vemos que no hay un desprendimiento completamente de lo geométrico. Para Leibniz $\int y \cdot dx = \mathcal{A}$ significa que la suma de los rectángulos infinitamente pequeños $y \times dx$ nos da $\mathcal{A}$.

4. LA INTEGRAL COMO NOCIÓN MATEMÁTICA

Sin duda, la integral, como noción epistemológicamente independiente, aparece en el Análisis de Cauchy. Para la constitución de la integral como una noción matemática fue necesario el reconocimiento de las funciones como objetos del Análisis. A partir de los trabajos de Fourier acerca de la conducción del calor y de la cuerda vibrante, hubo un desarrollo en las ecuaciones diferenciales que motivaron más aún la autonomización de la integral.

4.1. El nacimiento de la Integral en Bernoulli

En un artículo publicado en 1691, Johann Bernoulli resuelve el problema de la isócrona y la catenaria haciendo uso del "nuevo cálculo". El artículo titulaba *Lecciones Matemáticas del Método de las Integrales*, introduciendo el nombre de ***integral*** (que al parecer primero la sugirió su hermano Jakob) y definiéndola como la inversa de la diferencial.

En el primer tratado sobre cálculo diferencial e integral entre los años 1691 y 1692, llamado *Lectiones mathematicae de método integralium allisque*, Bernoulli plantea el problema de la curva isócrona. En la búsqueda de la solución al problema de la curva isocrónica, se da cuenta que este problema obedece a la siguiente ecuación diferencial:

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

Bernoulli concluye que las *integrales* correspondientes deben ser iguales:

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

Parece que en estas instancias aparece, por primera vez, el término integral.

Aunque se le atribuye a Johann Bernoulli haber identificado el proceso inverso la diferencial a través de la palabra *integral*, la paternidad del término debería ser para su hermano Jacob, el cual hizo significativas contribuciones. Es una discusión abierta sobre a quién se le atribuye el término integral, al parecer es Johann el que se ha reservado el derecho; pero, como indica Cantor (1991), algunos trabajos de Jakob demuestran que él también tiene (totales) derechos sobre el término mismo.

Pero no solamente lo son los Bernoulli, quienes contribuyen en la conformación del concepto de integral, sino, como aparece en (Pier, 1996), fueron muchos matemáticos los que contribuyeron en esta dirección. Tatón lo expresa de la siguiente manera:

> Sin duda es la escuela continental la que dirigió los avances en el ámbito de lo infinitesimal. La iniciativa emprendida por la escuela de Leibniz, la superioridad de su simbolismo detrás de este hecho, así como la participación de un gran número de matemáticos y su valiosa y fructífera rivalidad les llevó a participar en el progreso de todas las ramas del análisis. Johann y Daniel Bernoulli, Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace, y Legendre son los principales artesanos de esta extensión y del desarrollo del cálculo infinitesimal. (Pier, 1996)

Los procesos llevados a cabos de cuadraturas y anticuadraturas van recibiendo nombres propios como integrales y diferenciales. De acuerdo con (Recalde, 2011), es un hecho epistemológicamente significativo, puesto que "con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se está identificando una noción que amerita un tratamiento especial". No significa que la integral haya alcanzado su máximo estatus en la idea de noción matemática, y que recibiendo un nombre propio, el de *Integral*, alcance el estatus de noción matemática propiamente dicha, se hecho está dando a entender que todos estos procesos que se han ventilado van en una dirección de resolución de problemas que responden a unos métodos propios. La definición de Bernoulli de la integral como la inversa de la diferencial es distinta a la concepción de Leibniz. Para Leibniz el problema es netamente geométrico, en donde la operación consiste en la *summa* de rectángulos infinitamente pequeños $y \times dx$, que podría ser simbolizado como $\int ydx$.

¿Qué es $\int Xdx$?

> Hemos visto antes cómo encontrar diferenciales de cantidades: ahora, al revés, vamos a mostrar cómo encontrar las integrales de los diferenciales, es decir, las cantidades de las que son las diferencias. (Bernoulli, 1691)

Es decir, $\int ydx = P$ significaría que $dP = ydx$.

Aunque para Bernoulli, el uso principal de la integración es la determinación de áreas, reconoce que no es la única aplicación; observa que mediante esta operación es posible encontrar una curva que responda a determinada propiedad dada por sus tangentes. Este método lo llamó “método inverso de las tangentes”.

Todos los métodos de Leibniz para resolver problemas de curvas iban tomando una dirección de condensación en donde se trabajaban con ecuaciones, precisamente con cantidades geométricas variables. Alrededor de 1700 esto se iba tornando engorroso gracias a la emergencia de curvas mecánicas y de la Matematización de fenómenos físicos. El pasado geométrico de la integral se estaba olvidando, abriendo paso a muchos más métodos, las operaciones se estaban realizando sobre ecuaciones y la generalización a otro tipo de curvas cada vez era más necesaria. La operación de integración se hacía sobre fórmulas más generales que solamente expresiones de tipo algebraico, precisamente sobre expresiones de tipo analítico, cuestión que no era muy clara en ese momento.

4.2. Las ecuaciones diferenciales en el contexto de la integral

El éxito del nuevo Cálculo a las aplicaciones de la Física fue inmenso. Bernoulli utilizó el cálculo infinitesimal para desarrollar soluciones de problemas físicos que involucraban a las ecuaciones diferenciales. En su memoria de 1691, Bernoulli resuelve el problema de la *catenaria*. En esta misma vía, también planteó a los matemáticos el problema de encontrar la curva que modelaba el comportamiento de una cuerda flexible e inextensible colgada libremente de dos puntos fijos. Esa curva fue llamada la catenaria. Usando argumentos físicos, Galileo había abordado el problema, diciendo erróneamente que la curva en cuestión era una parábola.

Haciendo uso del nuevo Cálculo, otros matemáticos como Leibniz y Johann Bernoulli, publicaron diversos métodos de resolución al problema planteado por Jacques Bernoulli. Ambos encontraron en el cálculo infinitesimal la respuesta, de hecho la solución de Bernoulli se encuentra en los textos de mecánica y cálculo infinitesimal (Klein, 1972).

4.2.1. La solución al problema de la catenaria

Gran parte de las matemáticas del siglo XVIII se dedicaron a la fecundidad de resultados para la resolución de problemas, que a la reflexión de estos métodos. Gracias a la aplicación de los nuevos métodos establecidos, se pudo resolver el problema de la *catenaria*: Dada una cadena o una cuerda inextensible fijada por dos puntos, determinar su forma.

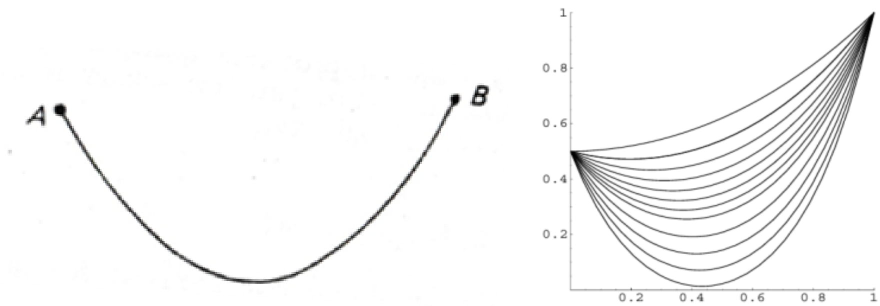


Figura 13. Forma catenaria

En su memoria de 1691 titulada *Lectiones mathematicae de methodo integralium,* Johann Bernoulli resuelve este problema basado en cinco presupuestos:

1) Es una cuerda inextensible, no sufre ningún estiramiento como resultado de su peso
2) Si se fija la catenaria en dos puntos A y C, la fuerza necesaria en esos dos puntos es la misma que soporta un peso D, que es igual al peso de la cuerda y está situado en el punto de encuentro de dos cadenas de ingravidez AD y CD y son tangentes.
3) Si se fija una cadena por otro punto, F, se puede eliminar la porción AF y la curva no cambia, los puntos restantes quedan en la misma posición.
4) Si conservamos los supuestos anteriores, a continuación, antes y después de la fijación de [F], la misma fuerza (es decir, la original), a posiciones particulares de la curva, es la misma, que si se arrancara el trozo desde el punto F. Esto no es sino un corolario del número anterior. En consecuencia, como uno alarga o acorta la cadena

de BFA, es decir, allí donde uno elige el punto de fijación F, la fuerza en ella no aumenta ni disminuye, pero siempre bajo la posición B sigue siendo el mismo.

5) El peso P [Figura 15], que es sostenido por dos cadenas situadas arbitrariamente AB y CB, ejerce sus fuerzas en los puntos A y C en una relación tal, que la fuerza necesaria en A es a la fuerza necesaria en C (después de dibujar línea vertical BG), como el seno del ángulo de CBG es el seno del ángulo de ABG, y la fuerza del peso P es la fuerza en C como el seno de todo el ángulo ABC es al seno del ángulo opuesto ABG. Esto se demuestra en todas las teorías de la Estática.

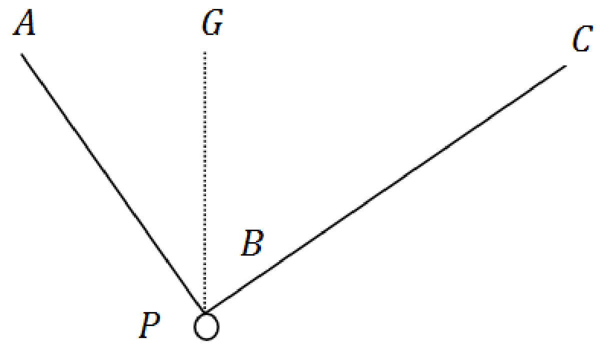


Figura 14. Propiedades mecánicas en la catenaria

Consideremos la figura dada a continuación

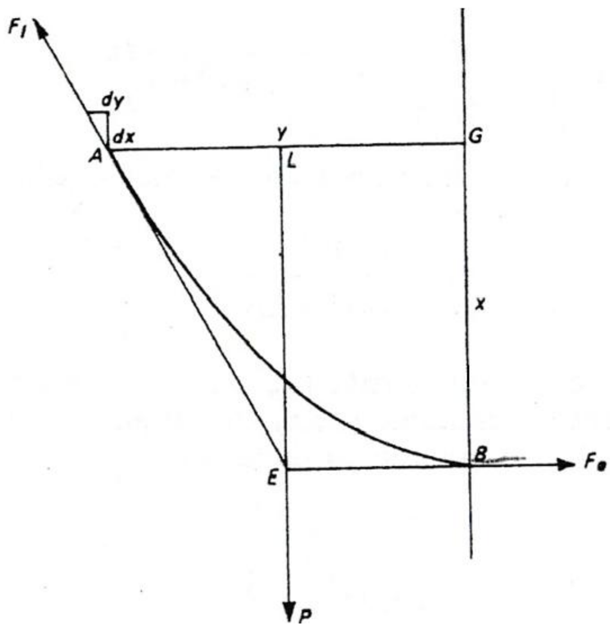


Figura 15. Relaciones en la catenaria

De las relaciones de fuerzas y los presupuestos anteriores, se tiene que

$$\frac{P}{F_0} = \frac{s}{a} = \frac{dx}{dy}.$$

donde s es igual a la longitud de la cadena desde A hasta B, y $F_0 = a$ es una constante. Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s},$$

que corresponde a la ecuación diferencial a resolver.

Para poder eliminar el parámetro s se procede de la siguiente manera

$$dy = \frac{adx}{s},$$

$$dy^2 = \frac{a^2dx^2}{s^2}.$$

Pero por teorema de Pitágoras

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$ds^2 = dx^2 + \frac{a^2dx^2}{s^2} = \frac{dx^2s^2 + a^2dx^2}{s^2},$$

$$ds = \frac{dx\sqrt{s^2 + a^2}}{s},$$

luego

$$dx = \frac{sds}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

Integrando a ambos lados tenemos[17]

$$x = \sqrt{s^2 + a^2},$$

de esto se obtiene que

$$s = \sqrt{x^2 - a^2},$$

y

$$ds = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

pero $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, luego

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

Y simplificando tenemos

[17] En su memoria, Bernoulli no menciona cómo resuelve esta integral. Sabemos que haciendo $u = s^2 + a^2$ es sencillo de resolver por sustitución. De todas formas, pensamos que muchos métodos eran ya conocidos, y la regla de $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, donde n no necesariamente era un entero, sino que podía ser un racional distinto de -1, era ya conocida.

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Ahora, Bernoulli dice

> Cabe señalar, en primer lugar, que debido a que $x = \sqrt{s^2 + a^2}$ y dado que $x > s$, el origen invariante de x está más allá del vértice B, y de hecho a la distancia E, ya que si $s = o$, entonces $x = a$ necesariamente. Por lo tanto, si deseamos colocar el origen de x en el vértice en sí, debemos establecer $x = x + a$. (Bernoulli, 1691)

Teniendo en cuenta esta consideración,

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

por tanto

$$y = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}.$$

Bernoulli no disponía de una forma analítica para la función logarítmica, y da interpretaciones geométricas de la integral, en términos de cuadraturas de curvas; diciendo que la integral en cuestión representa el área bajo la curva de

$$z = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + 2ax}},$$

pero también la interpreta como una longitud de arco e incluso como el área de una hipérbola, demostrando finalmente que la forma catenaria depende de la *cuadratura* de esta última[18].

Es importante destacar que en la idea de ecuaciones diferenciales ordinarias se va esbozando la idea de integral y cuando Los Bernoulli van a resolver las ecuaciones diferenciales, reconocen la gran importancia de esta operación, que amerita tener un nombre propio y ser digna de ser estudiada con sus propios objetos y métodos.

4.3. El Cálculo Integral de Euler

Todos los métodos establecidos por los matemáticos del siglo XVIII, dejaron de ser una colección de formas distintas de resolver problemas sobre curvas (como en Newton, Leibniz y un poco Bernoulli) para constituirse como una disciplina

[18] Es decir, el resultado sería una función logarítmica.

unificada y coherente denominada Análisis. Varios matemáticos aportaron en la proliferación de métodos de algoritmos de resolución, usando la integración como una operación entre expresiones matemáticas; el resultado es otra expresión matemática que corresponde a la ecuación de la cual son las diferenciales, pero esta labor de unificación, de ordenación y descubrimiento de nuevos resultados se debió en gran parte a Leonhard Euler. La gran tarea era darle forma a todos esos métodos anteriores de resolución de curvas, con un lenguaje y forma de proceder más adecuados.

Un aporte fundamental en la constitución de la integral como noción matemática fue el reconocimiento de esas expresiones sobre las cuales se operaba. A esas cantidades las llamó funciones y las definió como una expresión analítica:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números y cantidades constantes. (Euler L. , 1748)

En una imponente obra titulada *Institutiones calculi integralis*, Euler clarifica el objeto del cálculo integral:

> El cálculo integral es el método para encontrar la relación entre cantidades, a partir de una relación dada entre sus diferenciales: y la relación por lo tanto manifestada es usualmente llamada integración. Traducción del original, (Euler, 1770)

Si bien, a principios del siglo XVIII el problema de la integración era hallar una *ecuación* que representara la solución de una ecuación diferencial, para Euler, el problema central de la integral consiste en hallar una función primitiva de la función que se desea integrar.

En *Institutiones calculi integralis*, Euler presenta la integración de funciones algebraicas y algunas trascendentes, habla un poco de integrales definidas que no son tan elementales como las funciones gamma y beta, de gran importancia física. Trabajando en el cálculo de variaciones, Euler también trata las ecuaciones diferenciales de orden superior en términos de coeficientes diferenciales, aspecto significativo y de gran relevancia histórica dado que esto se corresponde posteriormente al cambio ontológico y epistemológico de la diferencial por la derivada.

Un problema interesante que aborda Euler en este tratado es el concepto de *constante de integración arbitraria*. Sabemos que si

$$\int F(x) = f(x) + C, \text{porque } (f(x) + C)' = F(x)$$

en donde C es una constante de integración arbitraria.

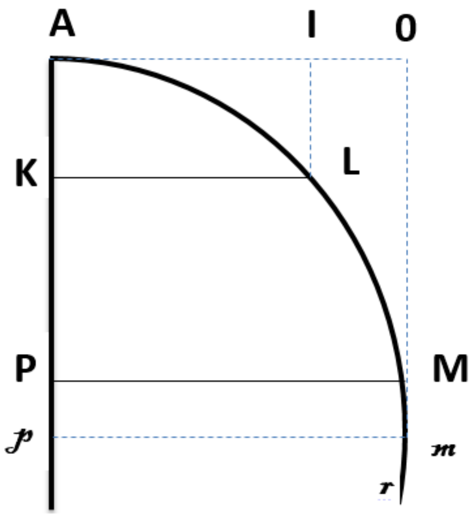


Figura 16. Sobre la naturaleza de la "constante de integración"

Para calcular el área contenida entre la curva $ALMm$ y el eje de la abscisa AP, considera la curva como un polígono de infinitos lados pequeños Mm; luego la diferencial del área es el trapecio $PpmM = \frac{PM+pm}{2} \times Pp = \frac{y+(y+dy)}{2} \times dx = ydx + \frac{dydx}{2} = ydx$ (porque $dydx$ es infinitamente más pequeño que ydx). $PpmM$ es el diferencial tanto de la zona APM contados a partir de A y de cualquier otra área, como $KPML$ contada desde el punto K. La solución para distinguir estos casos es determinar la constante C: si $\int ydx = Y + C$, nosotros calculamos y para $x = AK$ y el conjunto C de manera que $Y + C = 0$ en ese punto.

Euler también llamó la atención en la representación de funciones mediante series de potencias, dado que la integración de las mismas era mucho más sencilla (integración término a término).

4.4. La representación en series de Fourier

Uno de los problemas que fundamentales a finales del siglo XIII y finales del XIX fue el de la representación de una función por medio de series. Por ese entonces se pensaba que siempre era posible llevar a cabo el proceso de integración término a término, y que esto representaría una ganancia en la ejecución de procedimientos. Fourier evidenció la necesidad de un tratamiento para las funciones discontinuas; a partir de sus trabajos sobre la conducción del calor, se planteó el siguiente interrogante: ¿Qué condiciones debe cumplir una función para poder ser representada por medio de series trigonométricas? En sus investigaciones sobre la difusión del calor en un cuerpo sólido, mostró que responde a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Obteniendo una función trigonométrica como solución de esta ecuación diferencial:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \,, \text{con } n \in [0,2\pi]$$

en donde los coeficientes de Fourier son determinados de la siguiente manera

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

Lo anterior significaba que la representatividad de la función $f(x)$ en series de Fourier está sujeta a la existencia de las integrales mencionadas en el intervalo correspondiente. El hecho de que los coeficientes de la serie de Fourier se calcularan mediante una integral definida, exigía definir la integral para funciones arbitrarias.

La emergencia de funciones de este tipo superó de cierta manera la concepción de la función como una expresión analítica, como decía Euler. El sentido de la integral como una antiderivada no tenía mucho sentido cuando se hablaba de funciones que eran discontinuas, motivando a reconsiderar el concepto de integral. Al parecer, todos los esfuerzos de la integración estaban dirigidos a la representación de una función por medio de series, y la integración se terminó convirtiendo en un problema subsidiario al de representación de funciones por series. (Bobadilla, 2012)

Problemas como la «continuidad», «discontinuidad», «discontigüidad» etc., hicieron pensar que el problema estaba pidiendo un retorno a la geometría. Fourier identificó a la integral como un área, planteando la necesidad de volver a la interpretación geométrica de la integral.

> […]el área de la curva reducida tomada desde $x = 0$ a $x = \pi$ da el valor exacto de los coeficientes de $\sin x$; y cualquiera que sea la curva dada puede ser la que corresponde a $\varphi(x)$ ya sea que podamos asignarle una ecuación analítica o que no depende de ninguna ley regular, es evidente que siempre sirva para reducir de cualquier manera la curva trigonométrica, así que el área de la curva reducida tiene, en todos los casos posibles, un valor definido el cual es el valor de los coeficiente de $\sin x$ en el desarrollo de la función. El caso es el mismo con los coeficientes b o $\int \varphi(x) \sin 2x dx$ (Fourier, 1822)

También es un momento importante en la Historia de la integral, pues Fourier está introduciendo la notación que se adoptará universalmente para las integrales definidas. Queda pues el siguiente interrogante en Fourier: ¿Cómo definir $\int_{-l}^{l} f(x)dx$, como un área, cuando f es arbitraria?

4.5. La integral de Cauchy

Cauchy es el punto de llegada a la maduración del análisis matemático como se entiende hoy en día. En 1821 escribe un libro trascendental en la historia de las matemáticas denominado *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. 1er Partie. Analyse Algebrique.* Después de todas las discusiones acerca de problemas de la conducción del calor, de la cuerda vibrante[19], etc., se evidenció que la definición de Euler de una función como expresión analítica tenía ciertas limitaciones. En este sentido, Cauchy proporciona una definición de función bajo un concepto que es de gran trascendencia y que durante 25 siglos ha sido escurridizo, que en la antigüedad griega era el innombrable de Aristóteles, y que significa la formalización de los procesos potencialmente infinitos: *El paso al límite*. Bajo el concepto de límite define lo que es cantidad variable, función, continuidad, convergencia, etc. Define a

[19] El problema de la cuerda vibrante consiste fundamentalmente en describir el comportamiento matemático de una cuerda que vibra.

la derivada y a la integral como un límite particular. Un aspecto importante en las definiciones que da Cauchy es la ausencia de apoyos geométricos (ni con fines aclaratorios), sino que todo queda supeditado al concepto de límite y al álgebra de desigualdades.

> Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban de diferir de é tan poco como queramos, entonces éste último valor, recibe el nombre de límite de todos los anteriores. (Cauchy A. L., 1821)

que posteriormente, usando una notación Weierstrassiana, se corresponde con

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ cuando $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$

Esta definición esconde los problemas de los procesos infinitos cuya existencia se asegura en el álgebra de desigualdades.

En la línea de desarrollo de la integral, es un punto de llegada, en donde se tiene el concepto de integral en su forma cosificada, como una noción propia de las matemáticas, basada en el concepto de límite. En términos generales, la integral es la generalización de un límite de infinitos sumandos infinitamente pequeños. Cauchy da la definición de integral y lo hace para las funciones continuas.

Sea una función $y = f(x)$, definida en el intervalo $[x_0, X]$. Tomando la partición $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = X$, se define la sucesión de diferencias, $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$, y la suma:

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

El valor de S_n depende de n, y de

$$\text{máx}\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}\} = \|P\|$$

En caso de que el límite S_n exista cuando n tiende a infinito y cuando $\|P\|$ tiende a cero, entonces este límite se denomina:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

A continuación, Cauchy demuestra que toda función continua es integrable. Es de gran importancia, en esta línea de desarrollo de la integral, que Cauchy enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo de una forma independiente, que como una definición de relación inversa a la diferenciación. Para ello se basa en el teorema del valor intermedio para integrales, también demostrado por Cauchy:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

Si en la integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ se hace variar uno de los dos límites, por ejemplo, la cantidad X, la integral variará junto con esa cantidad. Si se sustituye el límite de la variable X por x, se obtendrá como resultado una nueva función de x que será llamada una integral tomada a partir del *origen* $x = x_0$. Sea

$$F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx \qquad (1)$$

Esta nueva función, se obtendrá de la fórmula (19)(lección 22)[20]

$$F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx = (x - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], F(x_0) = 0 \qquad (2)$$

Donde θ es un número menor que la unidad, y de la fórmula (7) (lección 23)[21]

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta x)$$

O bien

$$F(x + \alpha) - F(x) = \alpha f(x + \theta\alpha) \qquad (3)$$

Se sigue de las ecuaciones (2) y (3) que si la función $f(x)$ es finita y continua en la vecindad de un valor particular atribuido a la variable x, la nueva función $F(x)$ será finita y además continua en la vecindad de este valor, ya que un incremento infinitamente pequeño de x corresponderá un incremento infinitamente pequeño de $F(x)$. Así, si la función $f(x)$ es finita y continua desde $x = x_0$ hasta $x = X$, lo mismo será válido para la función $F(x)$. Podemos añadir que si se dividen entre α a los dos miembros de la fórmula (3) se concluirá, al pasar al límite,

$$F'(x) = f(x) \qquad (4)$$

Así, la integral (1), considerada como función de x, tiene como derivada la función $f(x)$ que se encuentra bajo el signo $\int$. Se probará de igual manera que la integral

$$\int_{x}^{X} f(x)dx = -\int_{X}^{x} f(x)dx$$

[20] La del teorema del valor medio para integrales

[21] $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx$

Considerada como función de x tiene como derivada a $-f(x)$. Se tendrá entonces

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)dx = f(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\int_{x}^{X} f(x)dx = -f(x)$$

(Cauchy, 1994)

4.6. La integral después de Cauchy

Basado en el concepto de límite y una definición más rigurosa del concepto de función, Cauchy definió la integral para funciones continuas.

Una consecuencia de los trabajo de Fourier acerca de la conducción del calor y de la cuerda vibrante, fue que además del aporte a la concepción de integral mediante la incorporación de las ecuaciones diferenciales, se preocupó fundamentalmente por la integral de este tipo de funciones que no necesariamente eran continuas. Llamó funciones discontinuas al tipo de funciones "irregulares, "absolutamente arbitrarias" y de "trazo al azar". En su intención de poder hallar una representación analítica de este tipo de funciones, desarrolló una teoría de series –series de Fourier–. Se planteó un interrogante que se constituyó como uno de los ejes centrales en la teoría de la integración:

¿es cierto que las sumas parciales de la serie

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}$$

convergen a $f(x)$?

En sus trabajos supone la integral de una suma infinita es igual a la suma de las integrales (esto es, $\int_{-l}^{l}\{\lim_{n\to\infty} s_n(x)\}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} s_n(x)dx$), problema que involucra un concepto de gran relevancia para la integración que es la convergencia uniforme. Como se habló en 4.4., Fourier identifica a la integral como un área, y a su vez da una descripción de lo que él considera una «función arbitraria»:

En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa x recibe una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas $f(x)$ y todas ellas tienen valores numéricos concretos, ya sean positivos, negativos o nulos. No suponemos que todas estas ordenadas estén sujetas a una ley común a todas ellas, se suceden unas a otras de una manera arbitraria, y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada. Citado por (Grattan-Guiness, 1982)

En este sentido, Cauchy respondió a la pregunta de Fourier de cómo identificar $\int_{-l}^{l} f(x)dx$ cuando f es arbitraria dando su definición analítica de la integral. No significa esto que Cauchy defina la integral basándose en insumos geométricos. Precisamente Cauchy constituye una ruptura conceptual importante, donde los referentes geométricos son desterrados y se acude solo a lo analítico y define la integral como un concepto puramente analítico; pero a pesar de ello, no desconoce su interpretación geométrica como el área bajo la curva como una aplicación de la integral definida. Pero la respuesta de Cauchy va más allá., demuestra que una integral puede *existir*, más no necesariamente dice cómo se calcula, es decir, su manera de definir la integral definida venía a demostrar que su existencia no dependía necesariamente de la existencia de la antiderivada[22]. Ahora, en la perspectiva de Fourier y Cauchy surge otra pregunta: ¿puede definirse $\int_{a}^{b} f(x)dx$ para *cualquier* sucesión de ordenadas. El matemático alemán Gustav Dirichlet dio respuesta negativa a esta cuestión mostrando el siguiente contraejemplo:

$$\mathcal{K}(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ d, & \text{si } x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$$

en donde la integral no tendría ningún significado y donde $\int_{a}^{b} \mathcal{K}(x)$ no tiene un valor determinado. Esto es, porque para cada x se tiene una ordenada bien determinada $f(x)$: f es una función arbitraria –en el sentido de Fourier–, y según la definición de Cauchy esto no tiene sentido. Consideremos una partición P de $[a, b]$ con todas las diferencias $x_i - x_{i-1}$ arbitrariamente pequeñas y tal que todos los x_i distintos de a y b sean irracionales: la suma de Cauchy correspondiente S es entonces aproximadamente igual a $d(b-a)$. Por otra parte, también se puede tomar una partición P' con todos los $x_i' - x_{i-1}'$ arbitrariamente pequeños y todos los x_i' distintos de a y de b racionales: para tales particiones, S' es arbitrariamente próxima a

[22] Caso como $\int e^{-x^2}$

$c(b-a)$. Así pues, las sumas S y S' no se van aproximando a un valor límite *único*, y por lo tanto $\int_a^b f(x)dx$ en el sentido de Cauchy no existe.

Es decir, la integral de Cauchy no es suficiente para poder integrar aquellas *funciones arbitrarias* de las que hablaba Fourier. Dirichlet sin embargo, dio una salida a su propio problema. Si bien, su función característica $\mathcal{K}$ era densamente discontinua, podría ser que las funciones que fueran integrables fueran aquellas en donde sus puntos de discontinuidad pudieran determinarse de cierta manera. Es decir, la definición de Cauchy abarca aquellas funciones continuas y aquellas discontinuas en un número finito de puntos de discontinuidad. Dirichlet dice que no solamente serían aquellas funciones que tengan finitas discontinuidades, sino que podrían ser infinitas siempre y cuando formaran un conjunto diseminado[23] y así $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ exista. Este enunciado es conocido como la condición de Dirichlet. La preocupación de Dirichlet por la integración de funciones discontinuas fue retomada por su brillante alumno Bernhard Riemann que en su *Habilitationsschrift* de 1854 tomó una definición levemente distinta a la definición de Cauchy. Riemann extendió la definición de integral de Cauchy reconociendo que la condición de continuidad no era esencial.

Integral de Riemann. Una función f definida y acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable si la suma

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

van tendiendo a un único valor límite cuando los $x_i - x_{i-1}$ tienden a cero, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ese valor límite va a ser, por definición, $\int_a^b f(x)dx$. Expuso dos condiciones necesarias y suficientes sobre integrabilidad que son equivalentes:

(R1) La función f es integrable en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\sigma > 0$, $\exists\delta > 0$, tal que para toda partición P, con $\|P\| < \delta$, se tiene que $S(P,\sigma) < \varepsilon$, donde $S(P,\sigma) = \sum_{i\in T} \Delta x_i$, con $T = \{i : D_i > \sigma\}$.

[23] Denso en ninguna parte: «si a y b representan dos cantidades arbitrarias incluidas entre $-\pi$ y π, sea posible siempre encontrar otras cantidades r y s entre a y b, lo suficientemente próximas para que la función permanezca continua en el intervalo r a s»

(R2) f es integrable en un intervalo $[a,b]$ si y sólo si, para toda partición P, se tiene que, $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} D_i\Delta x_i = 0$, donde $D_i = \text{oscilación de } f \text{ en } [x_{i-1},x_i], 1 \leq i \leq n$.

Con esto, Riemann pudo demostrar que la condición de Dirichlet no era necesaria, porque podía ser mucho más discontinua que lo que había imaginado su maestro. Y como diría Riemann: "como estas funciones no han sido tomadas en cuenta hasta ahora, empecemos con un ejemplo concreto": Sea

$$g(x) = \begin{cases} x-n, & \text{donde } n \text{ es el entero más cercano a } x \\ 0, & \text{cuando } x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots \end{cases}$$

Tomando como base $g(x)$ se define la sucesión $\{g_n(x)\}$, donde $g_n(x) = g(nx)$, la cual sirve para definir la función: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i(x)}{n^2}$. f es discontinua en el conjunto de puntos de la forma $x = \frac{p}{2q}$, p impar y primo relativo con q, que es un conjunto denso. Se puede demostrar, que en efecto, esta función es R-integrable. Riemann pensó que esta definición era la más general de todas, ya que integraba funciones altamente discontinuas, densamente discontinuas. Pero el matemático Ulise Dini llamó la atención en que si se tiene f para la cual, en todo intervalo existen puntos t, tales que $f'(t) = 0$, y si $f(t)$ es acotada, entonces para todo $x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = 0$, puesto que en las sumas que definen la integral, se pueden tomar los t_i tales que $f'(t_i) = 0$. De esta manera, se tendría, $\int_a^x f'(x)dx = f(x) - f(a) = 0$, de donde $f(x) = f(a)$, para todo $x \in [a,b]$. Dini sospechaba la existencia de funciones del tipo anterior para las cuales $f'(x)$ no era integrable. Un ejemplo de tales funciones fue construido por el matemático sueco T. Broden en 1896: Sea $g(x) = x^{1/3}$. En $x = 0$ se tiene que $g'(x) = \infty$, para los demás valores $g'(x)$ existe y es finita. Tomando $\{a_n\} \subset [-1,1]$, y $g_n'(a_n) = \infty$. Si se toma la función $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i(x)}{2^n}$ se tendrá que, $f'(a_n) = 0$, para $n = 1,2,3, \dots$. Dado que cada $g_n(x)$ es estrictamente creciente, entonces f es estrictamente creciente, lo cuál significa que f tiene inversa h continua, $h = f^{-1}$, definida en $[f(-1), f(1)]$. Puesto que $h'(y) = \frac{1}{f'(x)}, y = f(x)$, entonces $h'(b_n) = 0$ para $b_n = f(a_n), n = 1,2,3, \dots$. Se puede comprobar que h' es acotada, se anula en un conjunto denso de puntos $\{a_n\}$ y es estrictamente creciente, luego no es constante; y por lo tanto, no sería Riemann integrable. Es decir, la integral de Riemann tiene limitaciones. Esto deja un resultado importante en la constitución histórica de la integral: La integrabilidad en el sentido de Riemann no se preserva bajo el paso al límite. Y bueno, tampoco la función característica no es R-Integrable, ya que las sumas superiores e inferiores tienden a valores distintos y fallaría (R2).

En busca de otra dirección, al finalizar el siglo XIX la teoría de integración de Riemann, se fue perfilando hacia el estudio de conjuntos y sus medidas. El punto de culminación fue la teoría de integración de Lebesgue, en donde retomó algunos elementos conceptuales de Jordan y Borel en la formulación de la teoría de la medida. Jordan introdujo el concepto de contenido: Sea E un subconjunto de $[a, b]$. Se definen dos números $c_i(E)$ y $c_e(I)$ llamados respectivamente contenido interior y exterior de E, de la forma siguiente: Sea $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ una partición de $[a, b]$ en intervalos I_r. Entonces

$$c_i = \sup_P \sum_{I_k \subset E} l(I_k), \quad c_e = \inf_P \sum_{I_k \cap E \neq \emptyset} l(I_k)$$

donde claramente se tiene

$$\bigcup_{I_k \subset E} I_k \subset E \subset \bigcup_{I_k \cap E \neq \emptyset} I_k$$

de manera que

$$\sum_{I_k \subset E} l(I_k) \leq c_i(E) \leq c_e(E) \leq \sum_{I_k \cap E \neq \emptyset} l(I_k)$$

y el conjunto E se llama medible en el sentido de Jordan si $c_i(E) = c_e(E)$, y en este caso, su contenido (único) se representa por $c(E)$. Con estos insumos, Jordan reformuló la definición de integral de Riemann:

Sea $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ una partición de $[a, b]$ en conjuntos medibles disjuntos E_k (es decir, tales que $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$). Se definen las siguientes sumas:

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k c(E_k), \quad U(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k c(E_k)$$

donde m_k y M_k representan, respectivamente, el extremo inferior (inf) y el extremo superior (sup) del conjunto de valores $f(x)$ para $x \in E_k$. Entonces se definen las integrales inferior y superior de la forma

$$\underline{\int_{a}^{b}} f = \sup L(P) \qquad \overline{\int_{a}^{b}} f = \inf U(P)$$

y se dice que f es R-integrable si y sólo sí

$$\underline{\int_{a}^{b}} f = \overline{\int_{a}^{b}} f$$

Es una ruptura metodológica importante. Antes de Jordan, se había formulado solo para particiones en subintervalos. Con esto, se ha ganado mucha más generalidad, ya que admite tipos más generales de particiones P, y con ello, una mayor generalización de la integral.

Otro matemático llamado Hankel dio un teorema basado en el concepto de oscilación. Para Hankel, una función $f(x)$ tiene un salto mayor que un entero positivo σ en un punto x:

$$\text{Si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \text{tal que } |\delta| < \varepsilon \text{ y } |f(x+\delta) - f(x)| < \sigma$$

y define un conjunto S_σ que le permite caracterizar las funciones puntualmente discontinuas y totalmente discontinuas.

$$S_\sigma = \{x: f(x) \text{ tiene un salto mayor que } \sigma > 0 \text{ en } x\}$$

y con base en ello determina que una condición suficiente y necesaria para que una función acotada con infinitos puntos de discontinuidad sea R-Integrable es que para todo $\sigma > 0$, el conjunto S_σ sea diseminado. (condición que es necesaria mas no suficiente); y basándose el falso resultado de que todo conjunto diseminado puede ser encerrado en un número finito de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña, lo llevo a una gran confusión topológica, pues para Hankel los conjuntos diseminados tenían medida nula. Todas estas confusiones en términos de la Topología de conjuntos de puntos eran comprensibles ya que la teoría de conjuntos estaba en sus inicios todavía. En (Bobadilla, 2012) se llama la atención en lo siguiente: Actualmente sabemos que la relación de inclusión estricta entre los conjuntos de primera especie[24], los de medida cero y los diseminados es la siguiente: $\{A: A \text{ es de primera especie}\} \subset \{A: A \text{ es de medida nula}\} \subset \{A: A \text{ es diseminado}\}$. Por ejemplo, el conjunto de Cantor es de contenido cero pero no de primera especie y el conjunto Smith-Volterra-Cantor tiene medida ½ y no contiene intervalos, es decir tiene medida no nula y es diseminado.

Emile Borel también aportó a la constitución de la integral basada en la teoría de la medida. Para Borel, la base fundamental del concepto de medir reposa en la generalización de la longitud de un segmento, e introduce los conjuntos Borel-Medibles o *conjuntos borelianos*. Dice que la suma de una infinidad numerable de conjuntos es igual a la suma de sus medidas, que la medida jamás es negativa, y establece principios que luego se corresponderán con la medida de Lebesgue, que conocemos actualmente. El universo de los conjuntos borelianos queda determinado a partir de los intervalos y las operaciones de unión infinita, uniones numerables y complementos.

Con todos estos insumos ganados hasta ahora, y a través de 25 siglos de desarrollo matemático, se ha querido formalizar el problema de las cuadraturas. Lebesgue en su tesis doctoral de 1902: *Integral, Longitud y Área* desarrolla la teoría de la medida, y reconoce que para poder resolver los problemas que el formalismo analítico se ha visto limitado, debe retornar al problema primigenio y milenario de las cuadraturas: un aspecto geométrico. Reconoce que las bases conceptuales que erigen a la teoría de la medida están basadas en tres características fundamentales

1) Existe un conjunto cuya medida es diferente de cero
2) La medida es invariante bajo traslaciones
3) La medida de la unión de un número finito o numerable de conjuntos, disjuntos dos a dos, es la suma de las medidas de los conjuntos

Para Lebesgue, estas características sintetizan todo el desarrollo histórico de la medida. Comprende que para resolver los problemas actuales de la medida debe retomar las bases conceptuales que están en los antiguos. En su tesis doctoral reconoce que debe volver a leer a Euclides y Arquímedes, comprendiendo que ahí

[24] Un conjunto de primera especie son aquellos para los cuales existe un n tal que $P_n = \emptyset$. Si $P_n \neq \emptyset$ se denomina conjunto de segunda especie.

está la respuesta, cambiando el concepto de medida relativa de los antiguos por el de medida absoluta. Define la integral de la siguiente manera:

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$, tal que:

1. Existen m y M, tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$
2. Para todo c, d entre m y M, el conjunto $\{c \leq f \leq d\}$ es medible

Se toma una partición P de $[m, M]$, $P = \{y_0 = m, y_1, \ldots, y_n = M\}$ y se definen los conjuntos $e_i = \{x \in [a, b]: f(x) = y_i\}$, para $i = 1,2, \ldots n$ y $e_i' = \{x \in [a, b]: y_i < f(x) < y_{i+1}\}$, para $i = 1,2, \ldots n - 1$, los cuales son medibles. Sean las sumas,

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} y_i m(e_i) + \sum_{i=0}^{n} y_i m(e_i')$$

$$\delta_n = \sum_{i=0}^{n} y_i m(e_i) + \sum_{i=0}^{n} y_{i+1} m(e_i')$$

Entonces f es Lebesgue-Integrable si cuando n tiende a infinito y $y_i - y_{i-1}$ tiende a cero (es decir, la norma de la partición tiende a cero: $\|P\| \to 0$) las dos sumas coinciden; en este caso de coloca,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \delta_n$$

Lebesgue muestra que, en efecto, es una generalización de la integral de Riemann ya que toda función Riemann integrable es Lebesgue integrable.

Desarrollos posteriores de la integral ha habido varios: La *integral de Riemann-Stieltjes*, que es una extensión de la integral de Riemann; la *integral de Lebesgue-Stieltjes*, desarrollada por Johann Radón, que generaliza las integrales de Riemann-Stieltjes y de Lebesgue; la *integral de Daniell*, que incluye la integral de Lebesgue y la integral de Lebesgue-Stieltjes sin tener que depender de ninguna medida; la *integral de Henstock-Kurzweil*, definida de forma variada por Arnaud Denjoy, Oskar Perron y Jaroslav Kurzweil, y desarrollada por Ralph Henstock; la *integral de Haar*, que es la integral de Lebesgue con la medida de Haar; la *integral de McShane*; la *integral de Bochner* que extiende la integral de Lebesgue a espacios de Banach; la *integral de Itō*, integral que extiende a la integral de Riemann-Stieltjes, permite integrar respecto a procesos estocásticos que pueden no ser de variación acotada como el movimiento browniano, etc. que son desarrollos que se corresponden a la gran proliferación de las matemáticas en el siglo XX.

5. CONCLUSIONES

Jean Piaget en su *Epistemología Genética* promulgó: “la abstracción [matemática] es extraída no desde el objeto sobre el que actúa, sino de la acción misma. Me parece que ésta es la base de la abstracción lógica y matemática” (Piaget, 1970, pág. 16). En pro de los procesos de aprendizaje y comprensión es interesante esta mirada de Piaget, y contrastándola con los problemas (siempre actuales) de la enseñanza de los cursos de Cálculo, es interesante hacer esta revisión. Muchos se encuentran en una limitación de entender el formalismo y ven completamente aislados los conceptos matemáticos con las aplicaciones en sus diversos dominios, y ven lejana la idea de que las matemáticas han respondido a grandes interrogantes de las necesidades humanas, necesidades de todos los seres humanos como nosotros. Anna Sfard, en sincronía con Piaget, también llama la atención sobre este problema de orden epistémico y ontogénico: ¿Cómo se constituyen las nociones matemáticas? ¿Cómo puede esto ser significativo en los procesos de aprendizaje? Para ello, le preguntamos a la historia sobre la constitución del concepto de integral, y casi que todos sus desarrollos van por la misma vía: de los procesos a los objetos se formaliza la idea.

Para la incorporación de las teorías abstractas de la integración, Henri Lebesgue se da cuenta que no solamente debe seguir los delineamientos del análisis, sino también de la geometría: debe regresar a su génesis primaria, a sus raíces, a los antiguos griegos. Vuelve a leer a Euclides y Arquímedes y cambiando el concepto de medida relativa por el de medida absoluta, perfila a la integral dentro de una teoría de la medida que lleva una carga histórica que él resume en tres propiedades: Existencia de un conjunto de medida distinta de cero, invarianza bajo traslaciones y sigma-aditividad. Este documento se pensó como una síntesis de ese resultado: volver a los antiguos y ver el movimiento epistemológico que llevó de los procesos a las nociones en el caso particular de la integral.

La formalización del problema de medir ha sido un problema transversal a través de 25 siglos. El infinito ha sido quizá el concepto más controversial en el desarrollo de las matemáticas y los desarrollos de la medida e integración están íntimamente ligados con este concepto. El apelativo de innombrable para Aristóteles en las matemáticas redujo casi toda la matemática antigua a la geometría y la aritmética; esto ocasionó que muchos problemas geométricos de la antigüedad quedaron sin resolver. Uno de estos problemas fue el de la cuadratura del círculo, pero en su intención de resolución, a lo largo de varios siglos, se abrió paso a ramas de las matemáticas diferentes a la geometría y la aritmética. Euclides dejó el legado primario, su proposición X,1 de los *Elementos*, el cuál le permite a Arquímedes hablar del método exhaustivo como una formalización de los procesos infinitos. Esta es la etapa de *interiorización* del concepto. Para Piaget, un proceso se ha interiorizado si “puede llevarse a cabo a través de representaciones [mentales]” (Piaget, 1970), y para ser considerado, analizado y comparado éste no necesita ser realizado actualmente: a una figura arbitraria R le correspondía una cuadratura si existía una sucesión de polígonos que cumpliera con las hipótesis del principio de Eudoxo. Un ejemplo de ello es aquel triángulo equivalente al círculo de Arquímedes; triángulo cuya existencia está sujeta a la construcción imposible de π usando regla y compás. En Arquímedes –y posteriormente Cavalieri– hay mucho más en lo concerniente a la noción de integral: el continuo. Arquímedes entiende –al igual que Aristóteles– que la naturaleza íntima del continuo no son los indivisibles; pero tiene la gran preocupación, en términos de rigurosidad, de cómo algo que no tenga medida puede dar lugar a algo que sí la tenga. La respuesta está en la forma en la que contamos, de cómo contamos y cómo sumamos: cuando se suma numerables se tiene control sobre la suma, pero cuando uno está sumando lo que no es numerable, no tiene control sobre la suma, porque la manera en como se establece el continuo no es un proceso bien ordenado. Ese es el problema de fondo que se está planteando en Arquímedes. Él se equivoca porque suma lo numerable y lo no numerable como si fuera numerable, y la contradicción estriba en eso, en que la suma es distinta. El agregado de indivisibles no es de manera numerable sino no numerable. Entonces la suma no se puede establecer de manera canónica como él lo está pensando, que la medida es la suma de sus indivisibles. Justamente es lo que da lugar a la integral cuando decimos Δx_i por $f(x_i)$. Los trabajos de Arquímedes guardan los aspectos conceptuales del límite moderno, y justamente la integral es un límite, una formalización de suma infinita.

Esta etapa de interiorización podríamos extenderla hasta un poco antes de la geometría analítica de Descartes, ya que gracias a estos desarrollos, se fueron creando algoritmos para los procesos de cuadraturas. El plano cartesiano permitió operaciones en unidades más manejables: ya no se trabajaba con las propiedades de las curvas, sino con su ecuación cartesiana. Con el plano cartesiano se ganó mucho en términos de cosificar las herramientas de cuadraturas, al asignarle una ecuación a una curva; lo cual permitió que el espectro de curvas se ampliara mucho más, dando lugar al establecimiento de algoritmos más generales de procedimiento. Newton comprendió muy bien al identificar una ecuación que sería la cuadratura de otra ecuación. A una ecuación le asigna otra ecuación. Hace una operación específica, la operación cuadratura. Está manejando la idea de variables relacionadas; relaciona variables y luego interpreta eso en el problema histórico de la cuadratura y encuentra la ecuación de la cual es cuadratura. Muchos matemáticos se comprometieron de la misma forma con la empresa de las cuadraturas y desarrollaron un sinnúmero de métodos de resolución. Los Bernoulli aportaron fundamentalmente en el paso de herramienta a noción, al identificar con el nombre de *integral* a un proceso, especialmente en la solución de algunas ecuaciones diferenciales. Si bien, aunque Los Bernoulli usan varias heurísticas y notación parecidas a las de Leibniz (manipulación del triángulo característico, estableciendo proporciones similares, el uso del dy y dx, etc.), renueva la forma en que presenta estas operaciones (como un cúmulo autónomo de operaciones aplicativas a solución de ecuaciones diferenciales) dando un paso fundamental en la constitución histórica de la anterior operación "cuadratura", ahora bautizada por Los Bernoulli como "integral", definiéndola como la inversa de la diferencial. Aún así, la integral sigue estando en su estatus de proceso, es decir, la integral sigue en su etapa de *condensación*: "La etapa de condensación dura tanto como la nueva entidad permanezca estrechamente ligada a un cierto proceso" (Sfard, 1991). Con los trabajos de Euler, Lagrange, Weierstrass, entre otros, se fue "afinando" la operación de integración siguiendo un proceso de autonomización progresiva.

Como se menciona en (Sfard, 1991): "Solamente se llega a concebir la noción como un objeto maduro, diremos que el concepto ha sido cosificado". Esa tarea fue fundamentalmente desarrollada por los matemáticos franceses de principios del siglo

XIX, llegando a su punto culminante en la obra de Cauchy, fundando una nueva rama de las matemáticas cuyos objetos son las funciones, y una nueva operación: *el paso al límite*. La integral encuentra ahora un buen asidero y punto de llegada a su constitución de noción matemática. La integral es un límite de sumas infinitas, y el infinito se legaliza formalmente gracias al concepto de límite. Si bien, pueden haber funciones, pero sin el concepto de límite no es posible hablar de *la integral*. Para la constitución formal de la integral fue necesario fundamentalmente el reconocimiento de las funciones como objetos del análisis, cuestión que –además de los trabajos de Euler, Lagrange, Weierstrass, entre otros– le correspondió a Cauchy mediante todo el rigor ganado hasta la época, y aclarar también la noción de integral mediante el paso al límite.

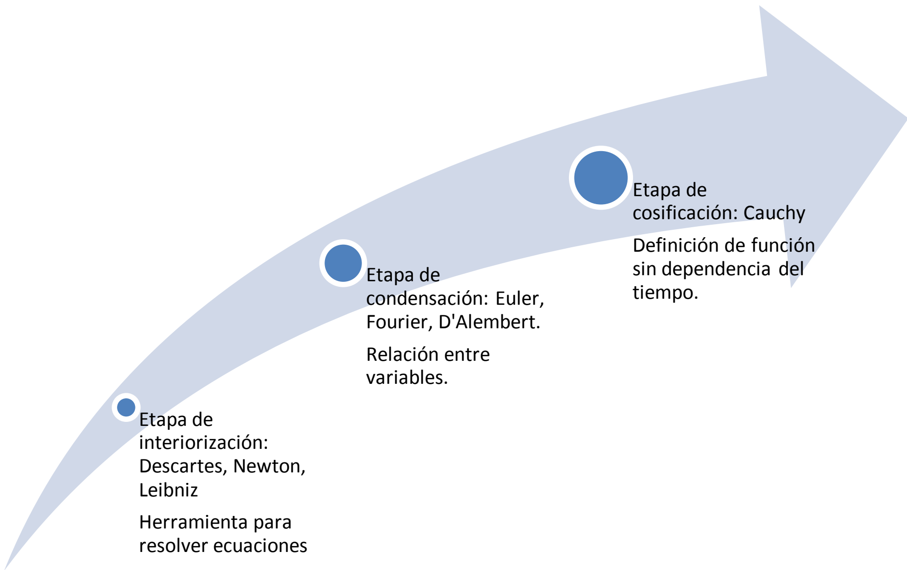


Figura 17. Itinerario curva-ecuación-función

Aquí la integral finaliza en su etapa de *cosificación*. Se presenta un concepto formalmente sin alusión a la geometría, en donde aparece la operación de integral definida como un límite en donde el rigor se asegura en las desigualdades usadas. Se reporta un cambio ontológico profundo de herramienta a noción matemática.

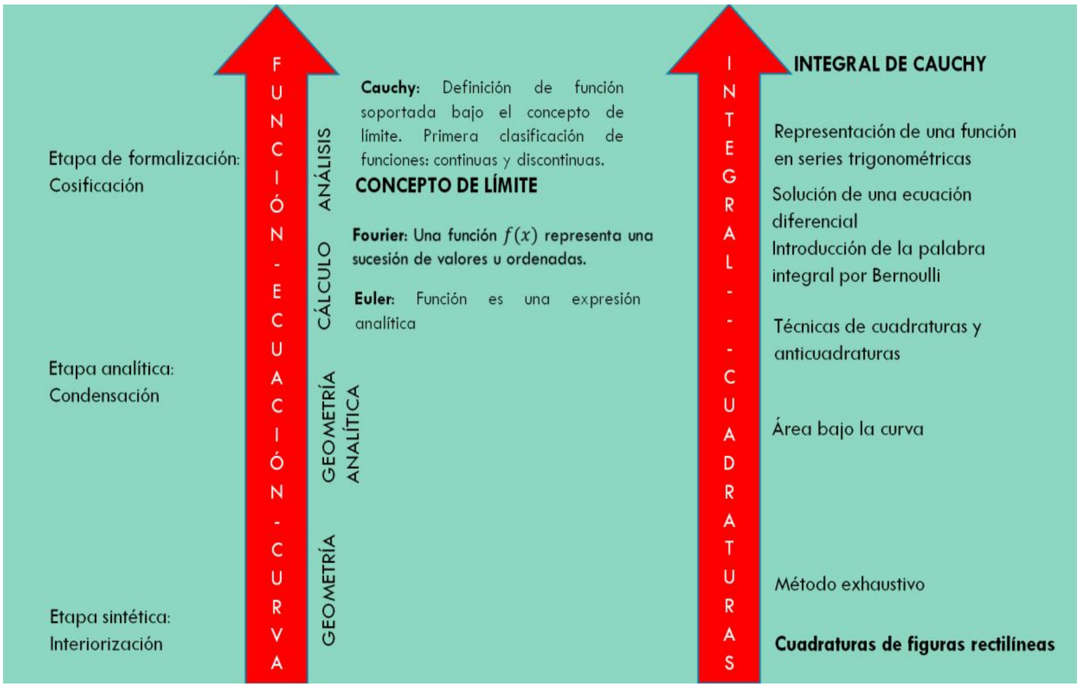


Figura 18. Proceso de las cuadraturas a la integral de Cauchy

Vimos tres grandes estadios en donde la medida ha pasado del problema primigenio de medida de las magnitudes geométricas (particularmente el caso de las cuadraturas) a ser formalizado en un concepto matemático llamado integral. No obstante, la evolución del concepto de integral, además de estar inmersa en el desarrollo histórico del problema de la medida, también lo está en el desarrollo de la noción de infinito, puesto que la concepción de los procesos infinitos fue cambiando poco a poco y es mediante el *paso al límite* que se pudo lograr su domesticación. Latente a estos desarrollos de la medida y la integral estuvo también el concepto de función, que posiblemente sea una de las razones fundamentales por las cuales, en la etapa analítica de la medida no se logró la formalización de la medida.

Si bien, ni Euclides ni Arquímedes resolvieron el problema de la cuadratura del círculo, las respuestas y aspectos conceptuales desplegados, marcaron en muchos aspectos, el derrotero de la evolución matemática por más de 25 siglos (Recalde, 2007). Las primeras respuestas al problema de la medida fueron dadas por Euclides y Arquímedes, quienes dieron los elementos conceptuales para poder entender cómo abordar el problema de medir. Los matemáticos posteriores fueron herederos de estas técnicas, en especial del método exhaustivo. La filosofía de esa época, que desterraba el infinito actual y solo acogía el infinito potencial limitó algunos desarrollos al problema de medir, y fue con la madurez del tiempo que la humanidad fue entendiendo el papel que juega el infinito en los procesos de la medida. La muestra final y definitiva de la legalización de estos procesos infinitos se logró con Cauchy en el siglo XIX.

El poder hablar de la constitución histórica de un concepto, como la integral, nos permite hacer reflexiones didácticas sobre la enseñanza de estos conceptos, entendiendo que no fue algo que se dio de la noche a la mañana, sino que fueron grandes eslabones que se fueron superando para poder obtener el final el concepto de integral. En la forma de abordar la enseñanza del concepto también nos da pautas de cómo ir construyéndolo. Cauchy ha definido analíticamente la integral para funciones continuas y funciones con cierto tipo de discontinuidades. Una primera generalización se da a través de la integral de Riemann, sin embargo tiene muchas limitaciones y albergaba problemas de consistencia. En 1902, Lebesgue se da cuenta que el problema de la medida se encuentra en las raíces de la medida misma, y cambia el concepto de medida relativa de los antiguos por el de medida absoluta. Para poder hacer esto, vuelve a leer a Euclides y Arquímedes, comprendiendo que aquí está la respuesta. Lo olvidado es nuevo, y las teorías matemáticas no se construyen muchas veces por un solo matemático, sino que éste lleva en sus hombros un conglomerado de conceptos que han sido construidos a través de muchos siglos, épocas, creencias, concepciones y filosofías, matizadas a través del tiempo, buscando cada vez más contundencia en las teorías matemáticas.

Es cierto que la integral alcanza su estatus de noción matemática, pero la integral no está en su concepto acabado. Es decir, como ente estructurado sí, pero no en su etapa completamente funcional. Trataré de explicarme un poco mejor. La integral, como definición, está en etapa acabada, pero su definición no abarca un espectro totalmente acabado de funciones a integrar. Cauchy lo hace para funciones continuas, pero su definición se torna muy limitada para funciones densamente discontinuas. Riemann redefinió la integral y mostró que era superior a la de Cauchy ya que integraba funciones densamente discontinuas, pero aun así la función de Dirichlet (característica de los irracionales) no logró integrarla. Tras los resultados del italiano Ulise Dini se demostró que la integral de Riemann tiene defectos, ya que la integral de Riemann no se preserva bajo el paso al límite. Se logró resolver estos problemas definiendo la integral bajo una teoría de la medida, cuestión abordada por Lebesgue en su tesis doctoral de 1902, pero posteriormente se habló de la relación del axioma de elección con los conjuntos no Lebesgue-Medible. Desarrollos posteriores de la integral ha habido varios: La *integral de Riemann-Stieltjes*, que es una extensión de la integral de Riemann; la *integral de Lebesgue-Stieltjes*, desarrollada por Johann Radón, que generaliza las integrales de Riemann-Stieltjes y de Lebesgue; la *integral de Daniell*, que incluye la integral de Lebesgue y la integral de Lebesgue-Stieltjes sin tener que depender de ninguna medida; la *integral de Henstock-Kurzweil*, definida de forma variada por Arnaud Denjoy, Oskar Perron y Jaroslav Kurzweil, y desarrollada por Ralph Henstock; la *integral de Haar*, que es la integral de Lebesgue con la medida de Haar; la *integral de McShane*; la *integral de Bochner* que extiende la integral de Lebesgue a espacios de Banach; la *integral de Itō*, integral que extiende a la integral de Riemann-Stieltjes, permite integrar respecto a procesos estocásticos que pueden no ser de variación acotada como el movimiento browniano, etc. que son desarrollos que se corresponden a la gran proliferación de las matemáticas en el siglo XX. Todos estos desarrollos de la integral también se corresponden con el prolífico desarrollo de las matemáticas en el siglo XX.

Epistemológicamente hablando, quedaría abierta la pregunta: Después de tantos desarrollos de la integral, en determinados espacios y medidas, y de sus innumerables aplicaciones a la Física y a la Ingeniería, ¿Qué es la integral?

En este sentido, se propone hablar de una nueva etapa de constitución de la integral como una noción matemática: la etapa *superestructural* de la integral.

> *"Un objeto se dice que está en su etapa superestructural cuando logra que todas sus representaciones y/o aplicaciones respondan a determinadas relaciones invariantes en su noción propia".*

En los desarrollos de las matemáticas clásicas, tenemos que el álgebra y el análisis son las ramas significativas de la época. Nótese el articulo determinado "el", que hace referencia a la unicidad de la rama. Si avanzamos en la época y ya hablamos de matemáticas modernas, ya tendríamos que hablar de teoría de conjuntos y lógica(s) matemática, teoría analítica y algebraica de números, algebras abstractas, geometría algebraica, funciones de variable compleja, medida e integración, topología general y algebraica, análisis funcional, teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

Con tantas ramas de las matemáticas, mucho creen, como es mencionado por Zalamea (2009), "sus tipos de objeto y de métodos se mantienen invariables" (Zalamea, 2009, pág. 21). Esto no deja más que de ser una creencia, ya que la ontología y epistemología de los objetos de las matemáticas modernas no son exactamente iguales. Es mucho lo que podría hablarse sobre esta idea, de polemizarla teniendo una postura aristotélica del asunto, en donde el método hipotético-deductivo esté inmerso en la forma de hacer matemáticas y que los objetos siguen siendo los mismos. Pero de ser esta afirmación cierta, rápidamente nos dirige hacia la dificultad del aprendizaje de las matemáticas. ¿Si los métodos son los mismos, y la ontología/epistemología de ellos es invariante, por qué las matemáticas se ven tan difíciles?

Esta pregunta abierta, puede verse en cierto sentido como una explicación a los modos de ver las matemáticas, por no hablar más del vendaje analítico de la misma. Si hablamos de medida e integración, el gran salto de comprensión del problema de la medida se ve en Lebesgue cuando, por medio de una rotación del plano cartesiano, logra ver lo que los demás no pudieron ver y resuelve un problema de más de 2500 años. Hoy día, se propone una forma de ver las matemáticas en su forma estructural que permite entender las formas y los métodos comunes a algunas ramas de las matemáticas de las matemáticas.

> La eclosión y la génesis de las estructuras matemáticas, vedadas en una estática aproximación analítica, resultan más visibles desde una perspectiva dinámica en la que un problema, un concepto o una construcción se transforman mediante las soluciones parciales del problema, las definiciones acotadas del concepto o el haz de saturaciones y decantamientos de la construcción. (Zalamea, 2009, pág. 27)

Los estructuralismos van dejando entrever esta posición activa, dinámica y viva en la forma de hacer matemáticas, en donde se ven las cosas que con comunes a todas sus ramas y articulándolas. En ese ámbito del pensamiento eminentemente vivo y en incesante evolución que es la matemática, una honda jerarquización no solo es imprescindible, sino motor mismo de creación (Zalamea, 2009).

En lo concerniente a la integral, hay dos aspectos que son transversales a todos los desarrollos de la integral hasta la actualidad: 1) Linealidad 2) Teoremas Límites. Esos dos aspectos son lo *uno detrás de lo múltiple* en el caso de la integral, y que constituye un buen asidero en la etapa de superestructuralización de la integral como noción matemática, en donde todos los desarrollos posteriores se corresponden con variaciones que siguen guardando en esencia estas dos propiedades.

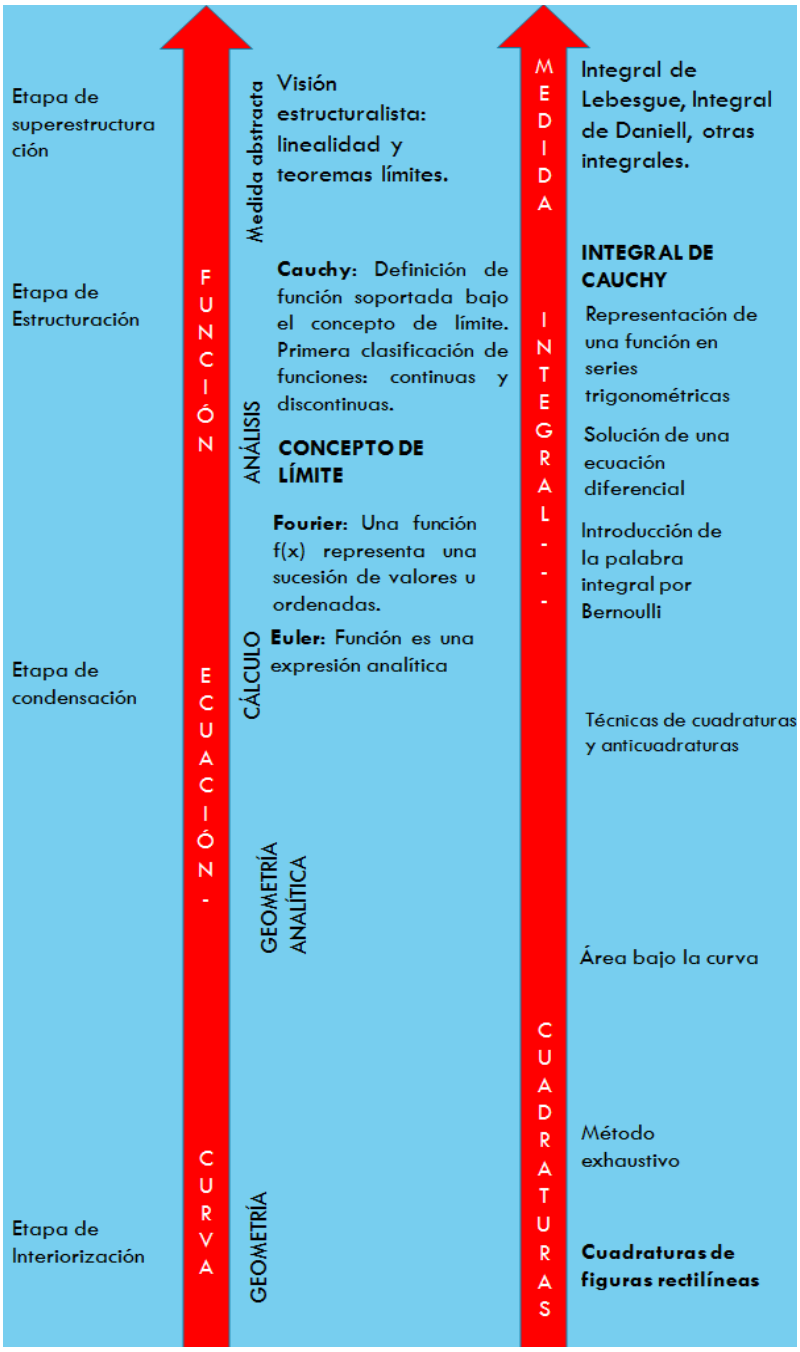


Figura 19. De la interiorización a la superestructuralización de la integral

Se apuesta a que la visión estructuralista permite una mejor aprehensión de las matemáticas (contemporáneas). La pregunta que surge es: ¿Si se logra establecer una mejor aprehensión en niveles altos de conocimientos matemáticos, no será un arma eficaz para los problemas actuales de matemáticas elementales (la de enseñar, la de los maestros)? En algunos programas universitarios se siguen aprendiendo cursos de análisis y topología igual que hace más de 60 años, entonces ¿qué es lo que pasa con el aprendizaje de las matemáticas contemporáneas?, o por el contrario, son currículos totalmente diferentes? De acuerdo con Zalamea (2009), "existe una *incapacidad profesional para observar las nuevas técnicas en juego"*.

Con todas estas reflexiones llegamos a que todo vuelve y recae sobre la conciencia de los educadores matemáticos, en su formación y visión hacia unas nuevas perspectivas que son las que comandan el desarrollo actual y futuro de las matemáticas. Se necesita de una buena formación matemática que permita poder entrever qué es ese *uno* (como convergencia de métodos) que está detrás de lo *múltiple* (como ramas prolíficas de las matemáticas) para unos niveles más amplios de compresión.

Bibliografía

Anderson, J. R. (1976). *Languaje, Memory, and Thought.* New York: Erlbaum, Hillsdale.

Arboleda, L. C. (2013). Matemáticas elementales y rigor axiomático en los "Foundations of Analysis" de Landau. *4ta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática* (p. 14). Cali: Universidad del Valle.

Arquímedes. (1970). De la cuadratura de la parábola. In F. Vera, *Científicos Griegos* (F. Vera, Trans., pp. 220-237). Madrid: Aguilar.

Arquímedes. (1970). Medida del círculo. In F. Vera, *Científicos Griegos* (pp. 94-99). Madrid: Aguilar.

Bernoulli, J. (1691). Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium. In *Johannis Bernoulli Opera Omnia* (pp. 385-558).

Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. Tesis Doctoral.* Cali: Universidad del Valle.

Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C. B. (1949). *The history of the Calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications, Inc.

Cantor, M. (1901). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III.* Leipzig: Teubner.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse.* París.

Cauchy, A.-L. (1994). *Curso de Análisis* (Versión en español ed.). (S. E. Ciencias, Trans.) México: UNAM.

Dhombres, J. (1980). *Mesure et continu. Épistémologie et histoire.* Nantes: CEDIC.

Edwards, C. H. (1949). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer-Verlag.

Euclides. (1970). *Elementos de Geometría.* (F. Vera, Trans.) Madrid: Aguilar.

Euclides. (1991). *Elementos.* (M. L. Puertas, Trans.) Madrid: Gredos.

Euler, L. (1748). *Introductio an analysis infinitorum.*

Euler, L. (1770). *Institutiones calculi integralis.* St. Petersburg.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur.* París: Jaques Gabay Editions.

González, P. M. (1995). *Las técnicas del Cálculo: Fermat, Wallis y Roberval.* Retrieved from http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/fundoro/web_fcohc/005_publicaciones/seminario/infinito.htm.

Grattan-Guiness, I. (1982). *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910.* Madrid: Alianza.

Halmos, P. R. (1985). Pure thought is better yet. *The College Mathematics Journal*, 14-16.

Hans, N. J. (2003). *A History of Analysis.* New York: American Mathematical Society.

Hawkins, T. (1970). *Lebesgue's Theory of Integration.* New York: Chelsea Publishing Company.

Heath, T. (1956). *The thisteen books of the Elements.* New York: Dover.

Henrici, P. (1974). The influence of computing on mathematical research and education. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 20*.

Hilbert, D. (1900). *Fundamentos de las Matemáticas.* (C. Alvarez, Trans.) Mexico: UNAM.

Kaput, J. J. (1979). Mathematics and learning: Roots of epistemological status. In *Cognitive Process Instruction.* Franklin Institute Press.

Klein, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza.

Lesh, R., & Landau, M. (1983). *Adquisition of Mathematical Concepts and Processes.* New York: Academic Press.

Levi, B. (1947). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Medvedev, F. (1991). *Scenes from the History of Real Functions.* Berlin: Birkhäuser.

MEN. (2006). *Estandares Básicos.* Bogotá.

Michel, A. (1992). *Constitution de la Théorie Moderne de L'Intégration.* París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones.* (I. Vargas, Trans.) México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology.* New York: W. W. Norton.

Pier, J.-P. (1996). *Histoire de l'intégration.* París: Masson S.A.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: enseñanza universitaria*, 103-127.

Recalde, L. (2011). *Lecciones de Historia.* Cali: Universidad del Valle.

Sanchez Fernandez, C., & Valdés Castro, C. (2001). *Los Bernoulli. Geómetras y Viajeros.* España: Nivola.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Skemp, R. R. (1971). *The Psichology of Learning Mathematics.* England: Penguin Books.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teacher*, 20-26.

Turégano, P. (1993). *De la noción de área a su definición.* La Mancha: Universidad de Castilla.

Turégano, P. (1996). *Área e integral.* La Mancha: Universidad de Castilla.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas.* Colombia: Universidad Nacional de Colombia.